Corrigé lycée 2023

Une somme égale à 2023

On veut écrire 2023 comme la somme de n entiers strictement positifs distincts rangés dans l'ordre croissant.

1. Combien y a-t-il de possibilités quand n=2 ?

$2023 = x + y$ avec $0 < x < y$ est obtenu pour tous les entiers x allant de 1 à 1011 donc il y a <u>1011 possibilités</u>.

2. Quelle est la valeur maximale de n ?

Pour obtenir la plus grande valeur possible de n on doit commencer par écrire 1 + 2 + 3 + 4 + …

Avec la formule $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ on obtient que n est au maximum égal à 63 puisque $\frac{63\times 64}{2} = 2016 < 2023$ et $2016 + 64 = 2080 > 2023$. Si on ne connait pas cette formule on peut aussi écrire un programme python ou utiliser une fonction somme de sa calculatrice.

$\underline{n = 63}$ convient en écrivant $\underline{2023 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 62 + 70}$ (on a remplacé 63 par $63 + 7 = 70$ pour obtenir 2023).

Pour cette valeur de n quelles sont les valeurs possibles pour le plus grand de ces n entiers ?

Le plus grand de ces 63 entiers peut donc être égal à 70, mais aussi à 69 en remplaçant 62+70 par 63+69. On peut aussi descendre jusqu'à 64 en ajoutant successivement 1 à 61, 60, 59, 58, 57 où on obtient $2023 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 56 + 58 + 59 + \cdots + 64$ (c'est-à dire 2080 – 57).

Il y a donc 7 valeurs possibles pour le plus grand des entiers, <u>les entiers de 64 à 70</u>.

3. On ajoute une condition : deux entiers qui se suivent doivent avoir une différence au moins égale à 2. Quelle est la valeur maximale de n ?

Pour obtenir la plus grande valeur possible de n on doit commencer par écrire 1 + 3 + 5 + 7 + …

Avec la formule $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ on obtient que n est au maximum égal à 44 puisque $45^2 = 2025 > 2023$ et $2025 - 89 = 1936 < 2023$. Si on ne connait pas cette formule on peut aussi écrire un programme python ou utiliser une fonction somme de sa calculatrice.

<u>n = 44</u> convient en écrivant $2023 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 85 + 174$ (on a remplacé 87 par $87 + 87 = 174$ pour obtenir 2023).

Pour cette valeur de n quelles sont les valeurs possibles pour le plus grand de ces n entiers ?

On peut retrancher successivement 1 au plus grand terme en ajoutant 1 à 85, puis 83, puis 81 jusqu'à 1, et arriver à $2023 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 86 + 131$ (on a retranché 43 fois 1).

On continue à retrancher successivement 1 au plus grand terme en ajoutant 1 à 86, puis 84, puis 82 jusqu'à 4, et arriver à $2023 = 2 + 5 + 7 + \cdots + 87 + 89$ (on a retranché 42 fois 1) et on ne peut pas aller plus loin.

Il y a donc 86 valeurs possibles pour le plus grand des entiers, les entiers de 89 à 174.

4. On impose maintenant que les entiers soient impairs. Quelle est la valeur maximale de n ?

Il n'est pas possible d'obtenir 2023 en ajoutant 44 nombres impairs donc n est au maximum égal à 43.

n = 43 convient avec $2023 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 83 + 259$.

Pour cette valeur de n quelles sont les valeurs possibles pour le plus grand de ces n entiers ?

En retranchant successivement 2 au plus grand terme et en ajoutant 2 à 83, puis 81, etc… jusqu'à 3 on arrive à $2023 = 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 85 + 175$ puis en recommençant avec le même procédé on arrive à $2023 = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 87 + 91$ et on ne peut pas aller plus loin.

Il y a donc 85 valeurs possibles pour le plus grand des entiers, les entiers impairs de 91 à 259.

Bon compte (exercice spécifique pour les secondes)

Avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chacun utilisé zéro ou une fois, on peut obtenir différents nombres en utilisant seulement des additions et des multiplications et en s'aidant de parenthèses.
On peut écrire par exemple $1000 = 2 \times 5 \times (8 \times 9 + 4 \times 7)$ *mais on ne peut pas écrire* $1000 = 2 \times 5 \times (87 + 13)$.

1. Donnez une façon d'obtenir 2023.

Une méthode consiste à factoriser $2023 = 7 \times 289 = 7 \times 17 \times 17$.
On peut alors écrire $17 = 8 + 9 = 2 + 4 + 5 + 6$ pour obtenir finalement :
$2023 = 7 \times (8 + 9) \times (6 + 5 + 4 + 2)$.

2. Donnez une façon d'obtenir 2023 en utilisant tous les nombres de 1 à 9.

$2023 = 1 + 6 \times (2 + 8 + 3 \times 4 + 5 \times 7 \times 9)$

3. Donnez une façon d'obtenir 2023 en utilisant le moins possible de nombres de 1 à 9, et expliquez pourquoi on ne peut pas faire mieux.

En reprenant $2023 = 7 \times 289$ on peut remarquer que $289 = 1 + 288 = 1 + 4 \times 72 = 1 + 4 \times 8 \times 9$ pour obtenir une façon avec 5 nombres : $2023 = 7 \times (1 + 4 \times 8 \times 9)$.

On ne peut pas obtenir 2023 en n'utilisant que 4 nombres.
Si on écrit 2023 comme un produit, la factorisation précédente montre que ce n'est pas possible avec seulement 4 nombres. Si on utilise une addition, ce n'est pas possible non plus puisqu'un produit de 3 nombres est au maximum égal à $9 \times 8 \times 7 = 504$ et on ne peut pas atteindre 2023.

4. Donnez une façon d'obtenir 2023 sans utiliser :
- ni le 1 ni le 3

$$2023 = 7 \times (8+9) \times (6+5+4+2) .$$

- ni le 4 ni le 6

$$2023 = 7 \times (8+9) \times (3 \times 5 + 2) .$$

- ni le 7 ni le 9.

$$2023 = (5+2) \times (1 + 4 \times 8 \times (6+3)) .$$

Deux allées à paver (exercice spécifique pour les premières et terminales)

On dispose d'un grand nombre de dalles de deux dimensions : 1x1 *et* 1x2.

1. Avec ces dalles on veut paver une allée de longueur n et de largeur 1. On note u(n) le nombre de façons de faire ce pavage. On a par exemple u(2) = 2 et u(3) = 3. Calculez u(5).

Cela revient à exprimer 5 comme une somme ordonnée d'entiers égaux à 1 (pour une dalle 1x1) ou 2 (pour une dalle 1x2). On a les possibilités suivantes :

$$5 = 1+1+1+1+1$$

$$5 = 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2$$

$$5 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2$$

Cela fait 8 façons donc <u>u(5) = 8</u>.

En considérant d'abord les différentes possibilités pour la première dalle donnez une expression de u(n) en fonction de u(n-1) et u(n-2). Calculez u(10).

Il y a deux possibilités pour la première dalle :
soit c'est une dalle 1x1 et il y a alors u(n-1) façons de terminer le pavage
soit c'est une dalle 1x2 et il y a alors u(n-2) façons de terminer le pavage

On a donc la relation <u>u(n) = u(n-1) + u(n-2)</u>.

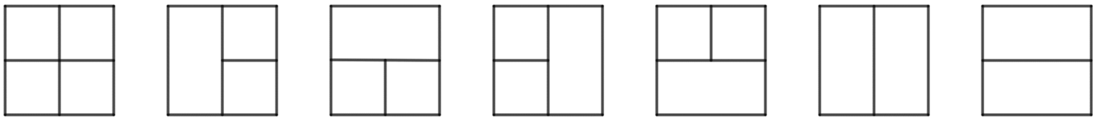
A partir de u(2) = 2 et u(3) = 3 on calcule u(4) = 5, u(5) = 8, u(6) = 13, u(7) = 21, u(8) = 34, u(9) = 55 puis enfin <u>u(10) = 89</u>.

La suite u(n) est appelée suite de Fibonacci du nom du mathématicien italien (1170 – 1250).

2. Avec ces mêmes dalles on veut maintenant paver une allée de longueur n et de largeur 2. On peut placer les dalles 1x2 *horizontalement ou verticalement.*

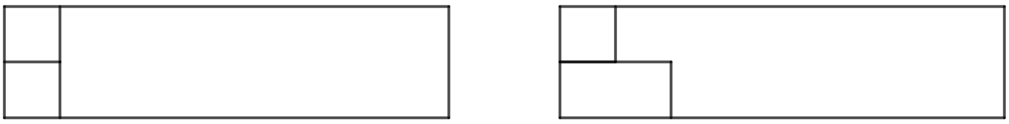
On note a(n) le nombre de façons de faire ce pavage. Montrez que a(2) = 7.

On trouve les pavages suivants :



On note b(n) le nombre de façon de terminer le pavage de l'allée quand on a débuté le pavage par une dalle 1x1. *Donnez une expression de b(n) en fonction de a(n-1) et b(n-1).*

Quand on débute le pavage par une dalle 1x1 en haut à gauche il y a deux façons de continuer :



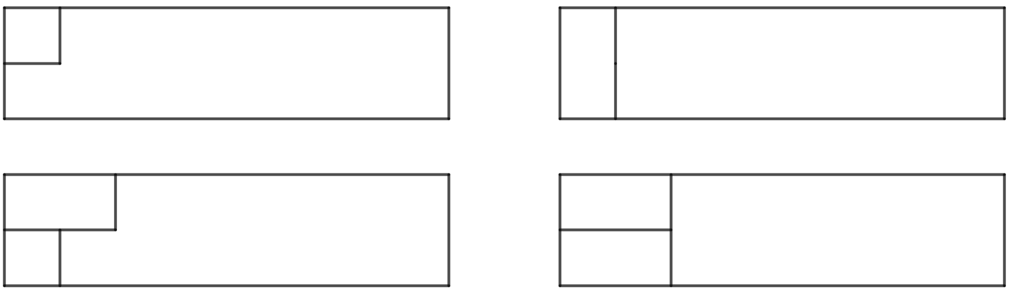
Dans le premier cas on est ramené à paver une allée de longueur n-1, il y a a(n-1) façons de le faire.

Dans le second cas on est ramené à paver une allée de longueur n-1, quand on a débuté le pavage par un carré 1x1 (qu'il soit placé en haut ou en bas cela revient au même), il y a b(n-1) façons de le faire.

On en déduit : b(n) = a(n-1) + b(n-1).

Donnez une expression de a(n) en fonction de b(n) et a(n-2). Calculez a(10).

On distingue les quatre différents cas suivant la première dalle posée en haut à gauche.



Si c'est une dalle 1x1 il y a b(n) façons de terminer le pavage.

Si c'est une dalle 1x2 posée « verticalement » il y a a(n-1) façons de terminer le pavage.

Si c'est une dalle 1x2 posée « horizontalement » complétée par une dalle 1x1 posée dessous à gauche il y a b(n-1) façons de terminer le pavage.

Si c'est une dalle 1x2 posée « horizontalement » complétée par une dalle 1x2 posée dessous il y a a(n-2) façons de terminer le pavage.

On a donc : a(n) = b(n) + a(n-1) + b(n-1) + a(n-2) = 2 b(n) + a(n-2).

Au départ on a a(1) = 2 et b(1) = 1.
On a déjà calculé a(2) = 7 et on calcule b(2) = a(1) + b(1) = 3

En utilisant b(n) = a(n-1) + b(n-1) et a(n) = 2 b(n) + a(n-2) on calcule successivement :

b(3) = 10	et	a(3) = 22
b(4) = 32	et	a(4) = 71
b(5) = 103	et	a(5) = 228
b(6) = 331	et	a(6) = 733
b(7) = 1064	et	a(7) = 2356
b(8) = 3420	et	a(8) = 7573
b(9) = 10993	et	a(9) = 24342
b(10) = 35335	et	a(10) = 78243.

Donnez une expression de a(n) en fonction de a(n-1), a(n-2) et a(n-3).

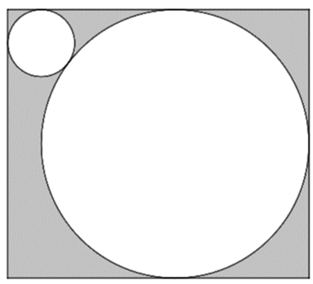
On déduit de l'égalité précédente que 2 b(n) = a(n) – a(n-2) d'où 2 b(n-1) = a(n-1) – a(n-3).

Avec b(n) = a(n-1) + b(n-1) et a(n) = 2 b(n) + a(n-2) on déduit :

a(n) = 2(a(n-1) + b(n-1)) + a(n-2) = 2 a(n-1) + 2 b(n-1) + a(n-2) = 2 a(n-1) + a(n-1) – a(n-3) + a(n-2)

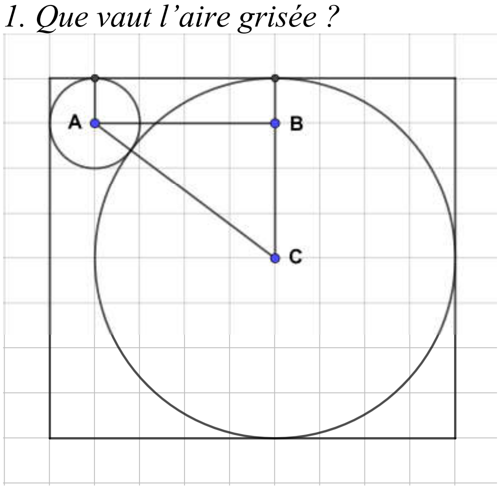
d'où enfin a(n) = 3 a(n-1) + a(n-2) – a(n-3).

Deux cercles inscrits dans un rectangle



Deux cercles de rayons 1 et 4 sont tangents entre eux et tangents à trois côtés d'un rectangle pour le plus grand, deux côtés pour le plus petit.

1. Que vaut l'aire grisée ?



On calcule les longueurs AC = 4 + 1 = 5 et BC = 4 – 1 = 3 d'où par le théorème de Pythagore AB = 4.

La longueur du rectangle est donc égale à 1 + 4 + 4 = 9 et sa largeur égale à 4 + 4 = 8.

L'aire hachurée est donc égale à 72 – π – 16 π = <u>72 – 17 π</u> soit environ 18,593.

2. Généralisez à deux cercles de rayons r et R avec 0 < r < R.

Avec les mêmes notations on calcule AC = R + r et BC = R – r d'où par le théorème de Pythagore :

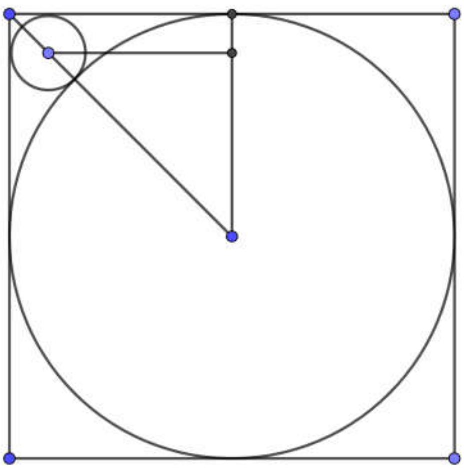
$AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4\,r\,R$ d'où $AB = 2\sqrt{rR}$.

La longueur du rectangle est donc égale à $R + r + 2\sqrt{rR}$ et sa largeur à $2R$.

L'aire hachurée est donc égale à $\underline{2R(R + r + 2\sqrt{rR}) - \pi(R^2 + r^2)}$.

3. Quelle condition doivent vérifier r et R pour que cela soit possible ?

Si on diminue r à partir de la valeur R, le grand cercle reste tangent à trois côtés du rectangle jusqu'à la position limite ou le rectangle devient un carré : le grand cercle est alors tangent aux quatre côtés du carré :



Dans le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse le segment joignant les centres des deux cercles on a l'égalité $R + r = (R - r)\sqrt{2}$ d'où l'on déduit $r(1 + \sqrt{2}) = R(\sqrt{2} - 1)$ d'où enfin :

$$r = R(\sqrt{2} - 1)^2 = R(3 - 2\sqrt{2})$$

La figure est donc possible quand

$$R(3 - 2\sqrt{2}) < r < R$$

Nombreuses grilles

Une grille de Sudoku 4x4 est une grille de 16 carrés partagée en 4 carrés 2x2.

On la remplit avec les chiffres 1, 2, 3 et 4.

Dans une grille de Sudoku classique, chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 2x2 contient une et une seule fois chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4.

Une grille de Sudoku X respecte la règle précédente avec une condition supplémentaire : chacune des deux diagonales contient une et une seule fois chacun des chiffres 1, 2, 3 et 4.

1. Complétez ces deux grilles sur votre copie :

Sudoku classique

4	1	2	3
3	2	**1**	4
2	**3**	4	1
1	4	3	**2**

Sudoku X

3	4	1	**2**
2	**1**	4	3
4	3	2	1
1	2	**3**	4

Pour le Sudoku classique on commence par placer le 4 en seconde ligne puis le 3 et le 1 en dernière colonne, puis le 2, le 3 et le 4 en troisième colonne, puis on termine le premier carré 2x2, puis celui du bas.

Pour le Sudoku X on commence par remplir les diagonales et on termine sans difficultés.

2. Combien existe-t-il de grilles complétées de Sudoku X ?
On commencera par dénombrer les grilles de Sudoku X dont la première ligne est 1 2 3 4.

Commençons par dénombrer les grilles de Sudoku X dont la première ligne est 1 2 3 4.
Il y a deux possibilités pour compléter le premier carré 2x2

1	2	3	4
3	4		

1	2	3	4
4	3		

En complétant par exemple les diagonales on obtient sans difficultés les deux grilles possibles :

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilités pour remplir la première ligne : choix du premier nombre, puis du second différent du premier, puis du troisième différent des deux premiers, il n'y a plus de choix pour le quatrième.

Au total cela fait $\underline{24 \times 2 = 48}$ grilles de Sudoku X.

3. Combien existe-t-il de grilles complétées de Sudoku classique ?

Comme dans le cas du Sudoku X on commence par dénombrer les grilles dont la première ligne est 1 2 3 4. On multipliera ensuite par 24 pour obtenir le nombre de grilles différentes.

Il y a deux possibilités pour compléter le premier carré 2x2. Choisissons par exemple la première façon, c'est-à-dire que la ligne 2 débute par 3, 4 (pour l'autre façon on aura le même nombre de possibilités puisque dans un Sudoku classique on peut permuter les deux dernières colonnes, 3 et 4 jouant le même rôle). On multipliera ensuite par 2 pour obtenir le nombre de grilles différentes.

Il y a deux façons de terminer la ligne 2 :

1	2	3	4
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	2	1

Comme on peut permuter les lignes 3 et 4 on peut se contenter de compléter la colonne 1 par 2 et 4 dans cet ordre, on multipliera ensuite par 2 pour obtenir le nombre de grilles différentes.

Première grille :

On n'a pas le choix pour compléter la colonne 3 mais il y a deux possibilités pour compléter la colonne 2, la colonne 4 s'en déduisant.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Cela fait deux grilles pour ce cas.

Deuxième grille :

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

On a d'abord complété la colonne 3 puis les colonnes 2 et 4. Il y a donc une seule grille pour ce cas.

Au total il y a donc $\underline{24 \times 2 \times 2 \times (2+1) = 288}$ grilles complétées de Sudoku classique.