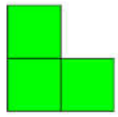
Tournoi 2024 corrigé lycée

Pavage d'un escalier

On veut paver entièrement un escalier régulier par des triminos coudés.

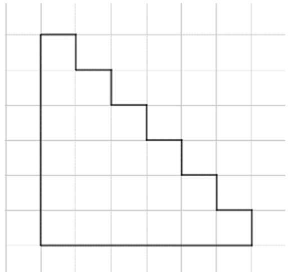


On a le droit de tourner le trimino (il y a donc quatre orientations possibles).

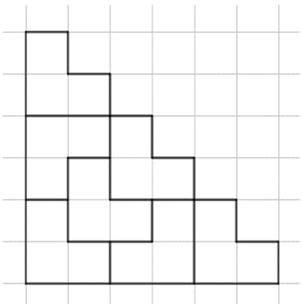
C'est possible pour un escalier de hauteur égale à 2 avec un seul trimino.

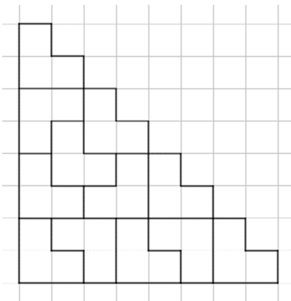
On peut montrer que ce n'est pas possible pour les hauteurs 3, 4 et 5.

1) Pavez un escalier de hauteur 6 (voir la figure) avec des triminos coudés.
En déduire un pavage avec des triminos coudés pour un escalier de hauteur 8.



Il n'y a qu'une façon de paver un escalier de hauteur 6. On en déduit le pavage d'un escalier de hauteur 8 en ajoutant au-dessous deux rectangles 2 x 3 partagés en deux triminos et en complétant par un trimino.

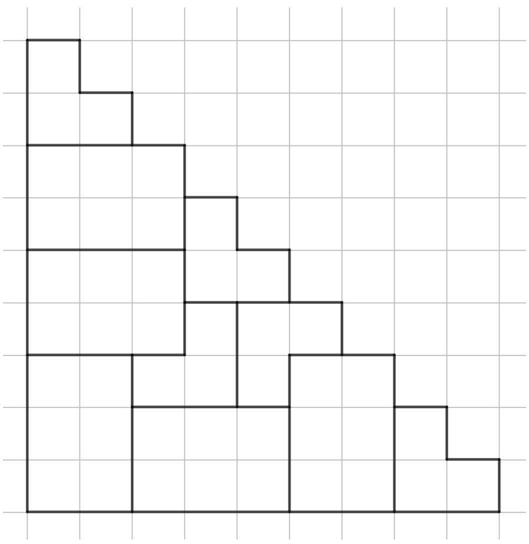


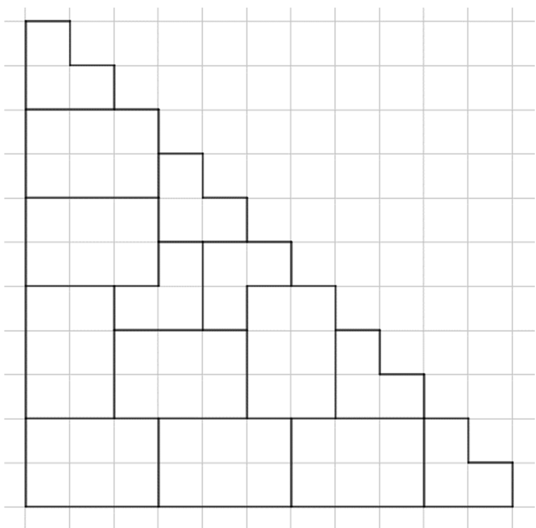


2) Pavez un escalier de hauteur 9 avec des triminos coudés.
En déduire un pavage avec des triminos coudés pour un escalier de hauteur 11.

Il y a plusieurs possibilités pour paver un escalier de hauteur 9.

A partir du pavage d'un escalier de hauteur 9 il suffit d'ajouter à la base trois rectangles 2x3 et un trimino pour obtenir le pavage d'un escalier de hauteur 11.





3) Est-il possible de paver les escaliers de hauteur 7 et 10 par des triminos coudés ?

Un escalier de hauteur 7 possède au total $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ petits carrés. Comme 28 n'est pas un multiple de 3 on ne peut pas le paver par des triminos.

Un escalier de hauteur 10 possède au total $28 + 8 + 9 + 10 = 55$ petits carrés. Comme 55 n'est pas un multiple de 3 on ne peut pas le paver par des triminos.

4) Montrez que l'on peut paver les escaliers de hauteur 6k, 6k+2, 6k+3 et 6k+5 (k entier naturel non nul).

Pourquoi ne peut-on pas paver un escalier de hauteur 3k+1 par des triminos ? (k entier naturel non nul)

On peut paver un escalier de hauteur 6k par des escaliers de hauteur 6 sur le bord et des carrés 6x6 donc par des triminos.

On peut paver un escalier de hauteur 6k+2 à partir du pavage d'un escalier de hauteur 6k en ajoutant à la base 2k rectangles 2x3 et un trimino (comme on l'a fait pour passer de l'escalier de hauteur 6 à l'escalier de hauteur 8).

On peut paver un escalier de hauteur 6k+3 à partir du pavage d'un escalier de hauteur 9 en ajoutant des escaliers de hauteur 6 sur le bord et des rectangles 6 x 3.

On peut paver un escalier de hauteur 6k+5 à partir du pavage d'un escalier de hauteur 6k+3 en ajoutant à la base 2k+1 rectangles 2 x 3 et un trimino (comme on l'a fait pour passer de l'escalier de hauteur 9 à l'escalier de hauteur 11).

Dans un escalier de hauteur 3k+1 il y a au total $\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$ petits carrés. Comme ce n'est pas un multiple de 3 l'escalier n'est pas pavable par des triminos.

Est-ce un carré ?

1) Démontrez que si un nombre se termine par 5 alors son carré se termine par 25.

$(10k + 5)^2 = 100(k^2 + k) + 25$ se termine par 25.

2) Soit D un nombre qui se termine par 5. On suppose que D est le carré d'un entier A : $D = A^2$.
Montrez que A se termine également par 5.

Si D se termine par 5 il est divisible par 5 donc A est aussi divisible par 5 : il se termine par 0 ou 5 mais pas par 0 (sinon D se terminerait par 0) donc A se termine par 5.

3) Soit D un nombre de neuf chiffres où tous les chiffres à part zéro apparaissent et qui se termine par 5.
Montrez que si D est un carré, alors il se termine par 625 puis qu'il est divisible par 625.

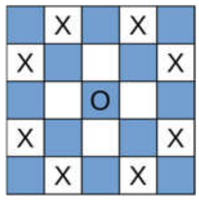
$D=A^2$ se termine par 5 donc A se termine par 5 et $D = (10k + 5)^2 = 100(k^2 + k) + 25$.

Les valeurs possibles pour le chiffre des unités de $k^2 + k$ sont 0, 2 et 6. Comme 0 est interdit dans D et comme 2 est déjà un chiffre de D la seule possibilité est 6 : D se termine donc par 625. De plus le chiffre des unités de k est 2 ou 7 donc A se termine par 25 ou 75, il est donc divisible par 25 et par suite $D = A^2$ est divisible par $25^2 = 625$.

4) Montrez qu'un nombre à 9 chiffres où tous les chiffres à part zéro apparaissent et qui se termine par 5 ne peut pas être un carré.

$D = 625 + 1000k$ étant divisible par 625 on en déduit que 5 divise k donc $k=0$ ou $k=5$. Mais 0 est interdit dans D et 5 est déjà un chiffre de D donc ce n'est pas possible.

Les cases amies



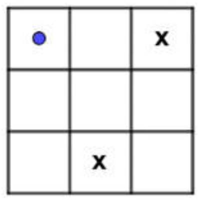
Aux échecs, le cavalier se déplace sur l'échiquier de deux cases verticalement et d'une case horizontalement ou de deux cases horizontalement et d'une case verticalement.

Par exemple, s'il est sur la case marquée d'un « O », il peut se déplacer vers les cases marquées d'un « X ».

On dit que deux cases forment une paire de cases « amies » si on peut aller de l'une à l'autre par un déplacement de cavalier (la paire {a, b} est la même que la paire {b, a}).

On cherche le nombre de paires de cases amies sur un échiquier de côté N qui a donc N^2 cases.

1) Combien de paires de cases amies existe-t-il sur un échiquier de côté 3 ? de côté 4 ?

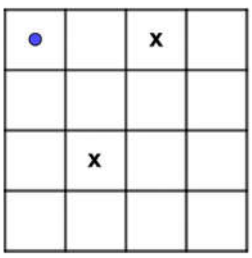


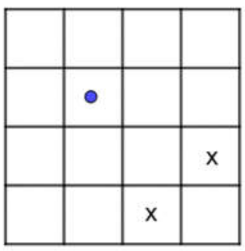
Sur un échiquier de côté 3 la case centrale n'a pas de case amie et chaque case en coin a deux cases amies : il y a 2 paires de cases amies pour chaque coin donc <u>8 paires de cases amies</u> au total.

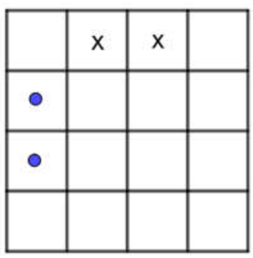
Sur un échiquier de côté 4 chaque case en coin a deux cases amies qui sont à l'intérieur de l'échiquier : il y a 2 paires de cases amies pour chaque coin donc 8 paires de cases amies contenant un coin.

Chaque case à l'intérieur est aussi amie avec deux cases sur le bord, cela fait 8 paires de cases amies de ce type.

Enfin chaque case sur le bord est amie avec une autre case sur le bord en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : cela fait 8 paires de cases amies. Il y a donc au total 8 + 8 + 8 = <u>24 paires de cases amies</u>.







2) Combien de paires de cases amies existe-t-il sur un échiquier de côté N, où N est un entier quelconque ?

On peut remarquer que chaque paire de cases amies est inscrite dans un rectangle 2 x 3 et qu'il y a deux paires de cases amies dans chaque rectangle 2 x 3. Il suffit donc de compter le nombre de rectangles 2 x 3 dans l'échiquier. Le coin supérieur gauche d'un rectangle 2 x 3 en position horizontale est en ligne L (L entre 1 et N-1) et en colonne C (C entre 1 et N-2) : il y a donc (N-1)(N-2) rectangles 2 x 3 en position horizontale et par suite 2(N-1)(N-2) rectangle 2 x 3 au total, d'où <u>4(N-1)(N-2) paires de cases amies</u> dans l'échiquier.

On retrouve bien 8 pour N = 3 et 24 pour N = 4.

3) Existe-t-il un entier N pour lequel il y a 2024 paires de cases amies ?
4(N-1)(N-2) = 2024 a une seule solution entière positive : <u>N = 24</u>.

N couleurs pour un triangle

On dispose de N couleurs pour colorier les côtés d'un triangle équilatéral.

Deux triangles qui ont les mêmes couleurs à une rotation ou à une symétrie près comptent pour un seul.

Par exemple, si on dispose des couleurs « bleu » et « rouge », on peut avoir 3 côtés bleus ou 3 côtés rouges ou 2 côtés bleus et 1 côté rouge ou 2 côtés rouges et 1 côté bleu, ce qui fait 4 triangles différents.

1) Combien de triangles différents peut-on avoir avec 3 couleurs ? avec 4 ?

Pour colorier un triangle il y a trois cas à considérer :
a) les trois côtés ont la même couleur
b) il y a un côté d'une couleur et les deux autres d'une autre couleur
c) chaque côté a une couleur différente.

Pour N = 3 il y a 3 possibilités pour le 1er cas, 3 x 2 = 6 possibilités pour le 2^{e} cas et 1 possibilité pour le 3^{e} cas (l'ordre des couleurs n'ayant pas d'importance) donc <u>10 triangles différents</u>.

Pour N = 4 il y a 4 possibilités pour le 1er cas, 4 x 3 = 12 possibilités pour le 2^{e} cas et 4 possibilités pour le 3^{e} cas (on laisse tomber l'une des couleurs) donc <u>20 triangles différents</u>.

2) Combien de triangles différents peut-on avoir avec N couleurs, où N est un entier quelconque ?

Reprenons les trois cas précédents pour N couleurs.
Il y a N possibilités pour le 1er cas, $N(N-1)$ possibilités pour le 2^{e} cas.
Dans le 3^{e} cas on choisit 3 couleurs parmi N couleurs, le nombre de possibilités est donc le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à N éléments c'est-à-dire $\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}$.
Au total cela fait $N + N(N-1) + \frac{N(N-1)(N-2)}{6} = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}$ triangles différents.

On remarque qu'on obtient le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à N + 2 éléments.
Cela s'explique en considérant l'ensemble {1, 2, …, N, *, **} dans lequel on choisit 3 éléments : on peut choisir 3 entiers (i, j, k) avec i < j < k ou bien (i, j, *) avec i < j pour lequel on répète i une fois et j deux fois ou bien (i, j, **) avec i < j pour lequel on répète i deux fois et j une fois ou bien (i, *, **) pour lequel on répète i trois fois.

3) Est-il possible, pour une certaine valeur de N, d'obtenir exactement 2024 triangles différents ?

L'équation $\frac{N(N+1)(N+2)}{6} = 2024$ possède une seule solution entière positive : N = 22.

4) On dispose maintenant de N couleurs pour colorier les côtés d'un carré.

Combien de carrés différents peut-on avoir avec N couleurs, où N est un entier quelconque ?

Deux carrés qui ont les mêmes couleurs à une rotation ou à une symétrie près comptent pour un seul.

Pour colorier un carré il y a 5 cas à considérer :

1) les quatre côtés ont la même couleur : N possibilités

2) il y a deux côtés d'une couleur et les deux autres d'une autre couleur, les côtés de la même couleur étant soit voisins, soit opposés : $2 \times \frac{N(N-1)}{2} = N(N-1)$ possibilités

3) trois côtés ont la même couleur, le 4^{e} a une couleur différente : $N(N-1)$

4) deux côtés ont la même couleur, les deux autres ont des couleurs différentes et différentes de la première, les côtés qui ont la même couleur étant voisins ou opposés : $2 \times N \times \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N(N-1)(N-2)$ possibilités

5) les côtés ont quatre couleurs différentes avec 3 façons différentes d'opposer les couleurs :
$3 \times \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{8}$

Au total cela fait $\frac{N^4}{8} + \frac{N^3}{4} + \frac{3N^2}{8} + \frac{N}{4}$ carrés différents.