Groupe IREM- DREAM

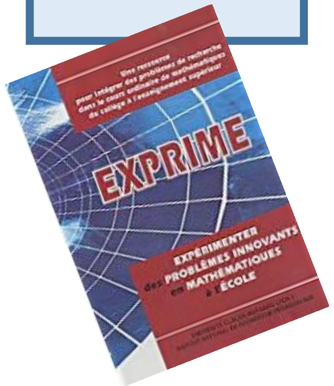
IREM de Limoges – 16 janvier 2010

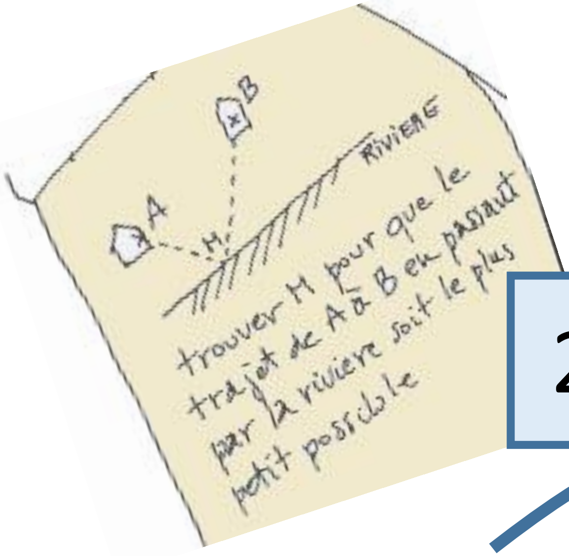
Fonder son enseignement sur la résolution de problème : Mythe ou réalité ?

Marie-Line Gardes
Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon
Inserm, CNRS et Université de Lyon
INSPE de l’Académie de Lyon
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

2005

2010

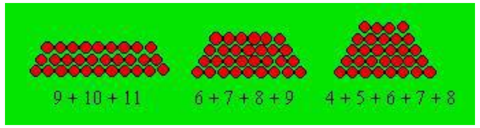


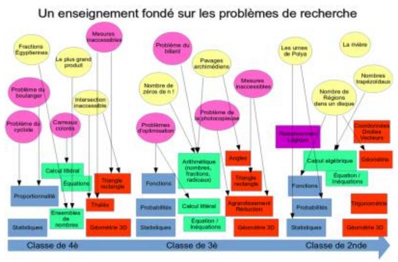


2011

2013

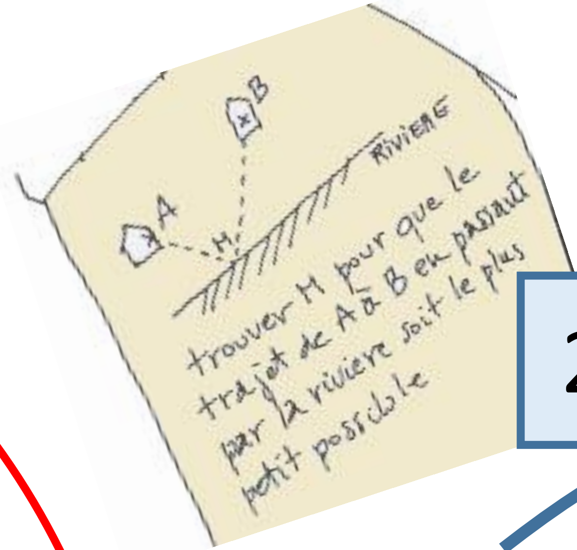
2015





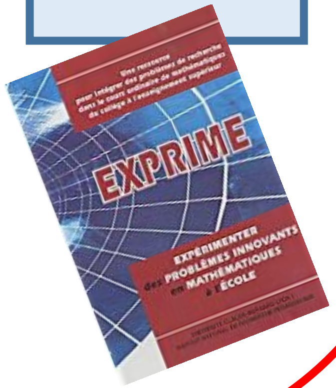
2019

Un petit voyage jalonné de problèmes au cœur de DREAM



2005

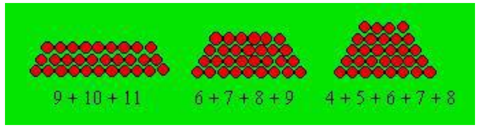
2010

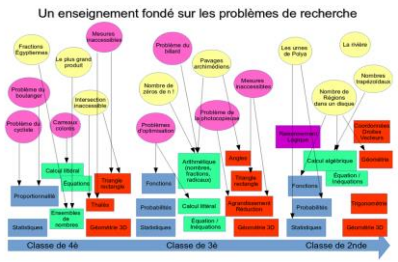


2011

2013

2015





2019

Un petit voyage jalonné de problèmes au cœur de DREAM

Le point de départ…

EXPERIMENTER
DES
PROBLEMES
INNOVANTS
EN
MATHEMATIQUES
A
L'ECOLE

4

Un constat

Pour autant, bien que de telles situations de recherche continuent à vivre, et, malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, elles ne se sont pas généralisées. (Aldon et al., 2010)

3

1

2

Dessin de Claude Tisseron, 1984

Le début du travail…

EXPERIMENTER DES PROBLEMES INNOVANTS EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Des hypothèses

La part importante de la dimension expérimentale dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au delà dans la société, de ce que sont les mathématiques.

Les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe.

L'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme.

Les difficultés rencontrées par les professeurs pour évaluer ce type de travail, compte tenu de ce que les modes d'évaluation habituels ne sont pas appropriés.

Le début du travail…

EXPERIMENTER DES PROBLEMES INNOVANTS EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Des axes de travail

Retravailler un certain nombre de problèmes de recherche classiques en les étudiant du point de vue des notions mathématiques susceptibles d'être mobilisées ou construites au cours de leur résolution […] une attention particulière sera portée aux éléments qui caractérisent une démarche expérimentale

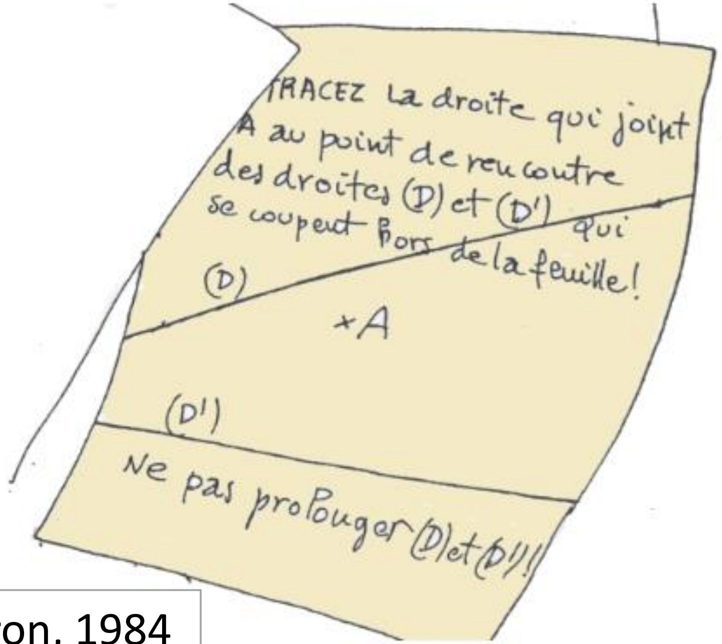
Choisir quelques notions clés des programmes […] et **élaborer une batterie de problèmes de recherche** permettant de travailler sur les allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée de notions mathématiques, **puis mettre ces problèmes à l'épreuve** dans des classes

Développer des outils permettant d'analyser l'activité des élèves dans la perspective de repérer avec précision comment se tisse une toile mathématique autour des objets mathématiques susceptibles d'être mobilises dans un problème donné.

Le travail *sérieux* commence…

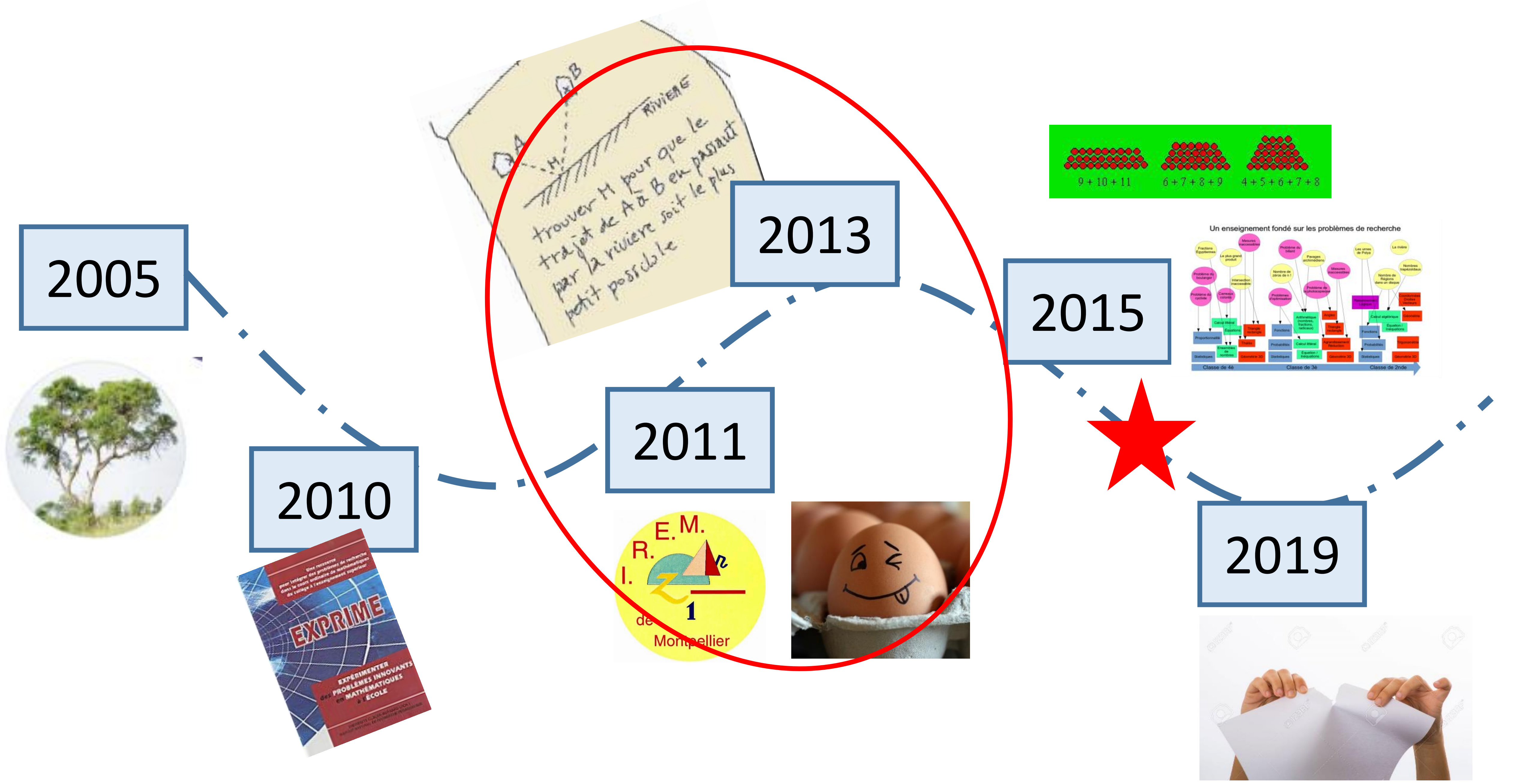
EXPERIMENTER DES
PROBLEMES INNOVANTS
EN MATHEMATIQUES
A L'ECOLE

Des problèmes, des situations, des expérimentations, des analyses



Dessins de Claude Tisseron, 1984

…et se termine par une ressource !



Un petit voyage jalonné de problèmes au cœur de DREAM

Des collaborations riches avec ResCo

Communauté de « chercheurs »

LéA ChERPAM

ResCo + **DREAM**

De la modélisation…

ResCo

Dream

Des fictions réalistes

IREM 2015-2016
Résolution Collaborative de Problème
L'arbre

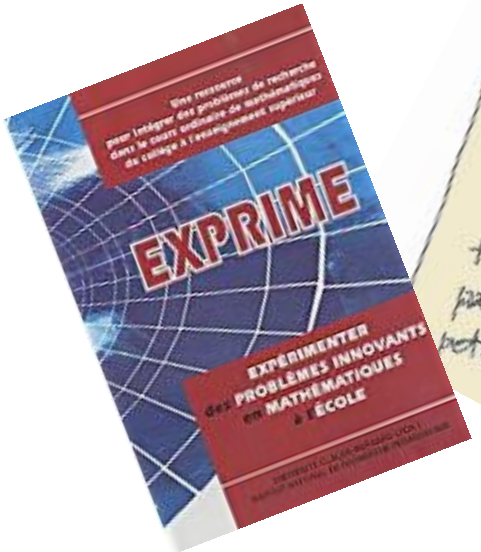
Simon Modeste
simon.modeste@umontpellier.fr

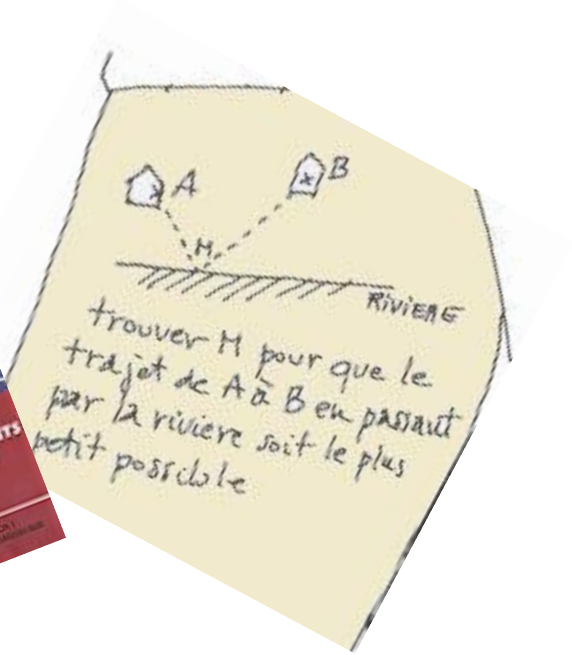
Des botanistes du Jardin des Plantes ont rapporté un arbre exotique inconnu, dont on vient de découvrir l'espèce. Pour étudier cette nouvelle espèce, les botanistes ont réalisé les croquis de l'arbre chaque année depuis 2013.

Schémas de l'arbre en novembre 2013, novembre 2014 et novembre 2015.

Les botanistes veulent faire construire une serre pour protéger l'arbre. Ils estiment qu'il aura atteint sa maturité en 2023. Pour les aider dans ce projet, prévoyez comment sera l'arbre en 2023 ?

Des travaux sur la *cohérence d'une ressource*

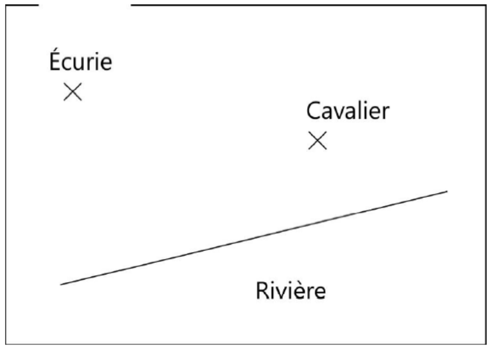


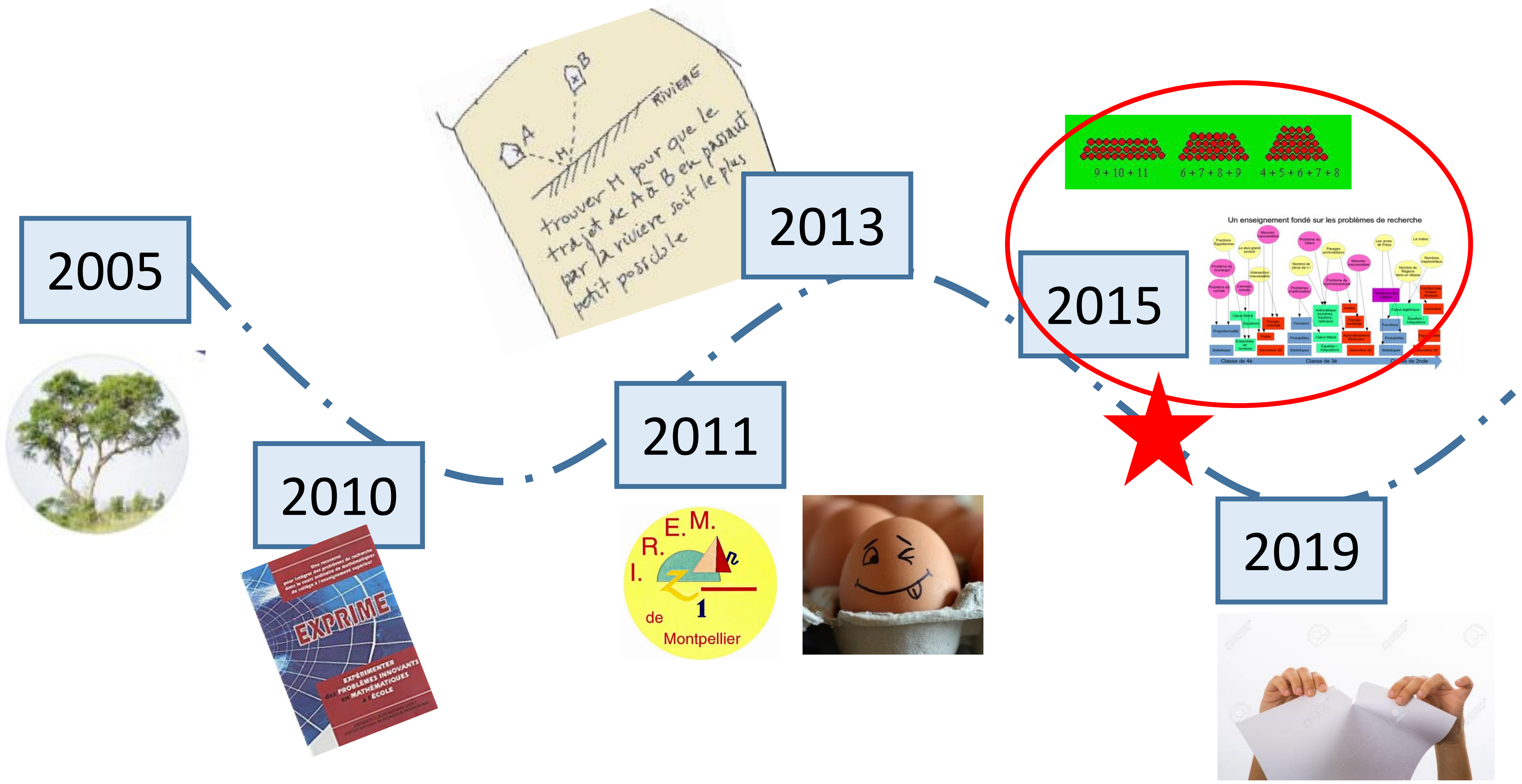


Comment un enseignant utilise-t-il la ressource ?

Construction d'une ingénierie didactique pour suivre la ressource, depuis sa conception jusqu'à son utilisation dans la construction d'une séquence de classe

Un cavalier s'apprête à rentrer à l'écurie. Toutefois, il doit encore faire boire son cheval à la rivière proche (à cet endroit la rivière coule quasiment de façon rectiligne). Par ailleurs, il souhaite économiser sa monture. A quel endroit de la rivière doit-il faire boire son cheval pour avoir la plus petite distance possible lors du trajet de retour à l'écurie ?





Un petit voyage jalonné de problèmes au cœur de DREAM

Une réflexion sur *Fonder son enseignement sur la résolution de problèmes*

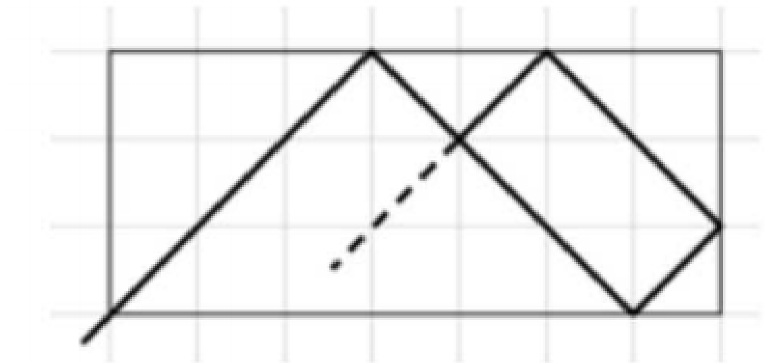
Objectif : créer une organisation qui permette

● de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe.
● d'approfondir la recherche d'un problème en classe.
● de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves.
● Relier la progression d'un niveau donné à ces SDRP.

A vous de chercher !

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).
Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux " rebondit " sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Temps 1
Résoudre le problème

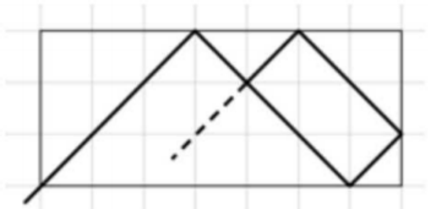
Question Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

A vous de chercher !

→ Analyse a priori math & didactique
→ Document accompagnement pour le prof

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).
Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage. Le rayon lumineux " rebondit " sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Un exemple :



Question Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

Temps 2
Faire une petite analyse didactique

Quelles connaissances et compétences mathématiques sont travaillées ?

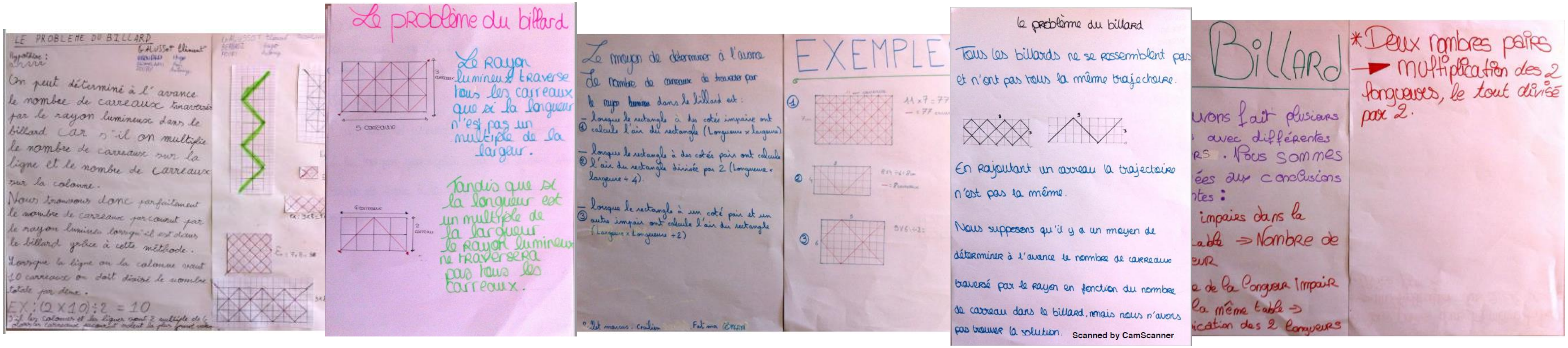
Que peuvent faire les élèves ? Quelles difficultés envisager ?

Quel scénario ?

A vous d'analyser !

Temps 3
Analyser les affiches

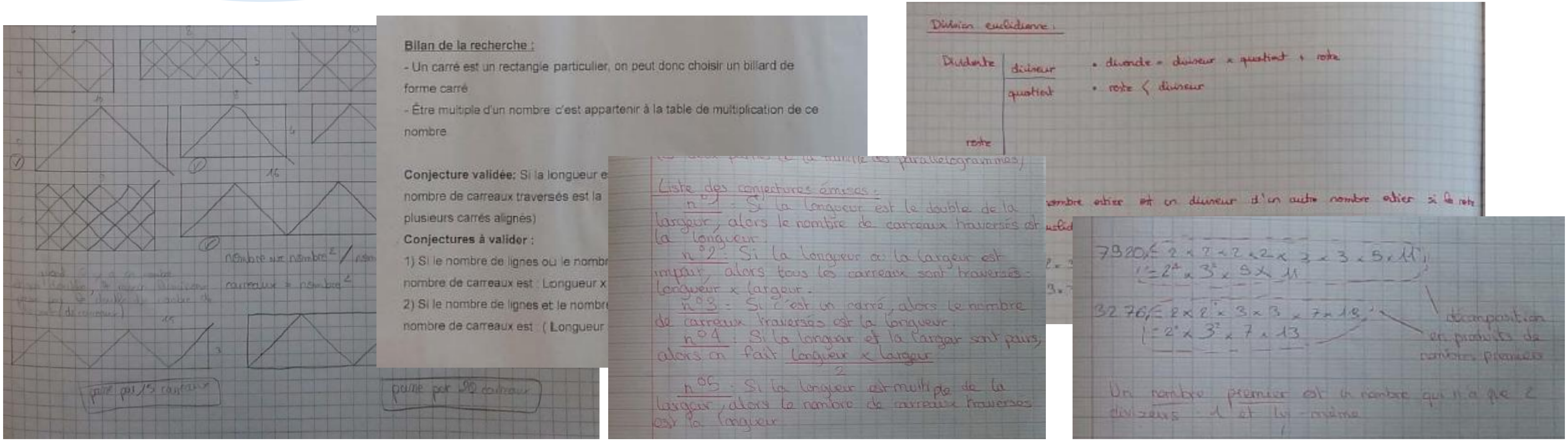
A partir des affiches réalisées dans une classe de 3ème suite à la recherche du problème du Billard quel bilan feriez-vous ? Quels prolongements peut-on imaginer ?



A vous d'analyser !

Temps 4
Analyser un cahier d'élève

A partir d'un cahier d'élève, analyser les apprentissages mathématiques réalisés par la classe autour de ce problème.



ARITHMÉTIQUE

Nombres premiers

Définition

Un nombre premier n'a que deux diviseurs :
1 et lui-même.

Exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23.

Crible d'Ératosthène

Il permet de trouver les nombres premiers.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres entourés sont premiers.

Décomposition

Un nombre entier peut se décomposer
en produit de facteurs premiers.

Exemples :
- $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Fraction irréductible

C'est une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

Exemple : $\frac{84}{315} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{3} \times 3 \times 5 \times \cancel{7}} = \frac{4}{15}$

Critères de divisibilité

Par 2, 5 ou 10

Un entier est divisible :
- **par 2**, s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 (c'est un nombre pair) ;
- **par 5**, s'il se termine par 0 ou 5 ;
- **par 10**, s'il se termine par 0.

Par 3 ou 9

Un entier est divisible :
- **par 3**, si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- **par 9**, si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Par 4

Un entier est divisible **par 4** si le nombre
formé par ses deux derniers chiffres
est un multiple de 4.

Division euclidienne

dividende	1	9	6	5	diviseur
	− 1	5		39	quotient
	0	4	6		
		− 4	5		
reste		0	1		

Le dividende, le diviseur, le quotient et
le reste sont des nombres entiers.

- dividende = (diviseur × quotient) + reste
- reste < diviseur

Diviseurs et multiples

Vocabulaire

Le reste de la division euclidienne
de 51 par 3 ou par 17 est **nul**.
- 17 et 3 sont des **diviseurs** de 51.
- 51 est un **multiple** de 3 et 17.
- 51 est **divisible** par 3 et 17.

Diviseur commun

Un diviseur commun à deux entiers divise
à la fois les deux entiers.

Exemples

3, 7 et 21 sont des diviseurs communs à 84 et 315.

Une structuration pour une séquence fondée sur les SDRP

Quelques éléments théoriques

Objectif : créer une organisation qui permette

● de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe.
● d’approfondir la recherche d'un problème en classe.
● de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves.
● Relier la progression d’un niveau donné à ces SDRP.

Qu’est-ce que l’activité mathématique ?

Faire des mathématiques c'est poser et résoudre des problèmes.

(Perrin, 2007)

on ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre une partie du problème n'est qu'une partie du travail ; trouver des bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions.

(Brousseau, 1998, p. 49)

L'activité mathématique pour moi, enfin, pour n'importe quel chercheur mathématique est d'une espèce assez différente: vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème ... Vous commencez par travailler un peu de manière apparente à une table avec un bout de papier, pas très longtemps - bon ... le but en fait, le plus souvent le problème, est un prétexte - le but est de faire à ce propos une méthode ou de créer des êtres mathématiques ... qui, dans le réseau de la connaissance mathématique, irradient. Pendant très longtemps ensuite, apparemment vous ne travaillez pas, mais vous travaillez tout le temps. C'est-à-dire, vous finissez laborieusement par arriver à une espèce d'état de transe qui dure trois semaines, un mois, où vous pensez pratiquement tout le temps à la même question et votre manière de penser n'est pas du tout la manière logique ... qui ne viendra qu'après.

André Lichnérowitcz

Les mathématiques, une science expérimentale ?

Nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance. (Gonseth, 1955)

Bkouche (1982) reconnaît un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes :

1. **l'origine empirique des objets étudiés** et des concepts ainsi mis en jeu ;
2. **la méthode** (ou les méthodes), qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel.

Il ajoute que « c'est **l'articulation de l'empirique et du rationnel** qui constitue la science expérimentale ».

Les mathématiques, une science expérimentale ?

L'origine empirique des objets étudiés

Ce qui fonde le caractère expérimental des mathématiques, c'est la manipulation des objets conformément à une théorie, manipulation rendue possible par la représentation sous forme symbolique des objets mathématiques.

La dimension expérimentale des mathématiques : allers et retours entre la manipulation d'objets mathématiques (**expériences**) et l'élaboration d'éléments théoriques sur les propriétés de ces objets (**théorie**).

(Dias, 2009 ; Durand-Guerrier, 2007 ; Gardes, 2013, 2018)

Les mathématiques, une science expérimentale ?

La méthode (ou les méthodes),

L'expérimentation en mathématiques (selon Perrin, 2007) :

« *une méthode d'investigation systématique* » qu'il n'hésite pas à « *désigner sous le nom de méthode expérimentale* » pour résoudre des problèmes mathématiques.

Cette méthode comprend plusieurs étapes à répéter éventuellement :

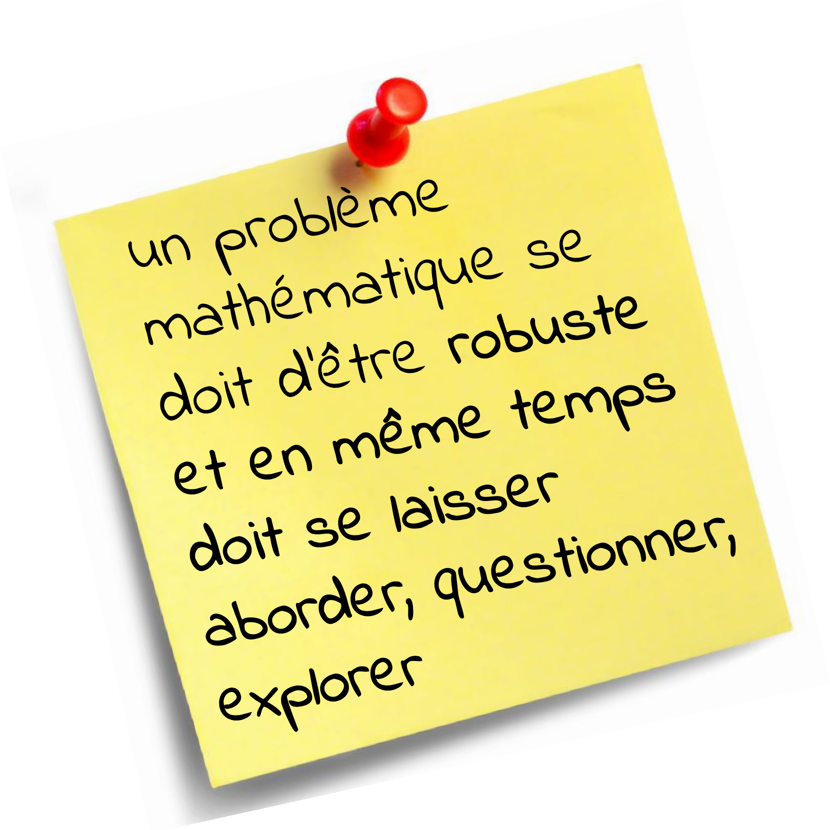
expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentative de preuve, etc.

Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques.

Quels problèmes choisir ?

[...] un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution.

(Ghys, 2010 reprenant les termes de la conférence de Hilbert)



J'appelle ici problème une question mathématique, en général ouverte, soit que je me la sois posée tout seul, soit qu'elle me l'ait été par un collègue ou un étudiant.

(Perrin, 2007, p.7)

Une référence au problème du mathématicien

Quels problèmes choisir ?
Un problème de recherche

Un problème mathématique avec les caractéristiques suivantes :

- Un énoncé court
- L’énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves
- Le problème permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale
- La recherche du problème met en jeu une dialectique entre la mobilisation, l’approfondissement de connaissances et le développement d’heuristiques

(Gardes, 2013, 2018)

Des situation didactique de recherche de problème (SDRP)

Ce sont des situations :

- **didactiques**, c'est-à-dire des situations où le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique ;
- **d'apprentissage**, c'est-à-dire des situations où l'élève fasse fonctionner ses connaissances puis modifier de son système de connaissances, pour répondre à la situation proposée ;
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout **l'engagement dans la résolution du problème** proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux ;
- où la **dimension expérimentale** est fortement présente.

(Front, 2015)

Une proposition pour une séquence fondée sur les SDRP

Une proposition pour une année, un cycle fondé sur les SDRP

Période 1

Séquence principale / Problème de recherche	En rituel - AP	Thème dominant
Le nombre de 0 de la factorielle	Calcul mental dans N et D ; Utilisation de la proportionnalité ; rappels sur les angles	Thème A - Arithmétique
Les nombres relatifs		Thème A

Période 2

Séquence principale / Problème de recherche	En rituel - AP	Thème dominant
Les symétries	Angles et parallélisme ; pourcentages ; Calculs dans Z (+ , - et x) ; initiation Scratch	Thème D
Les triangles		Thème D - Triangle

Période 3

Séquence principale / Problème de recherche	En rituel - AP	Thème dominant
Les triangles (suite)	Comparaison de relatifs, distance entre deux points, Scratch et coordonnées	Thème A - Nombres et fractions
Se repérer		Thème D

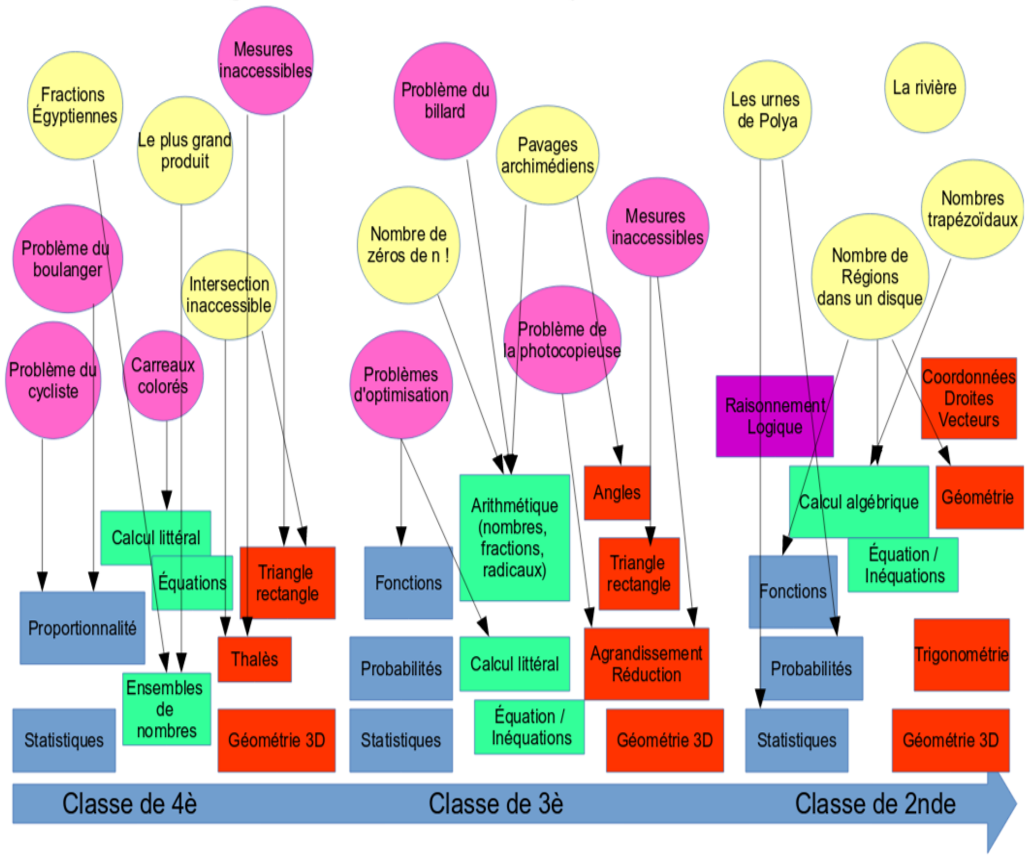
Période 4

Séquence principale	En rituel	Thème dominant
Quel quotient ?	Calculs de périmètres et conversions d'unités + Repérage dans le plan + Comparaison de fractions	Thème A - Nombres et fractions
Les parallélogrammes		Thème D

Période 5

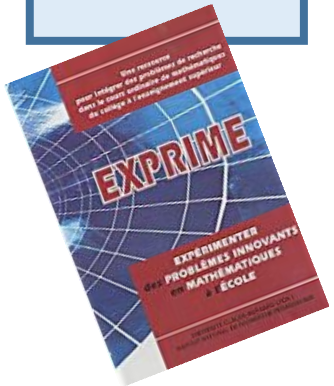
Séquence principale / Problème de recherche	En rituel	Thème dominant
Gestion de données	Calculs dans Q (+, - et x) + Initiation aux probabilités + rappels sur les volumes	Thème B
L'Aire de l'Antarctique		Thème D - Les aires
Le château de cartes		Thème A - Calcul littéral

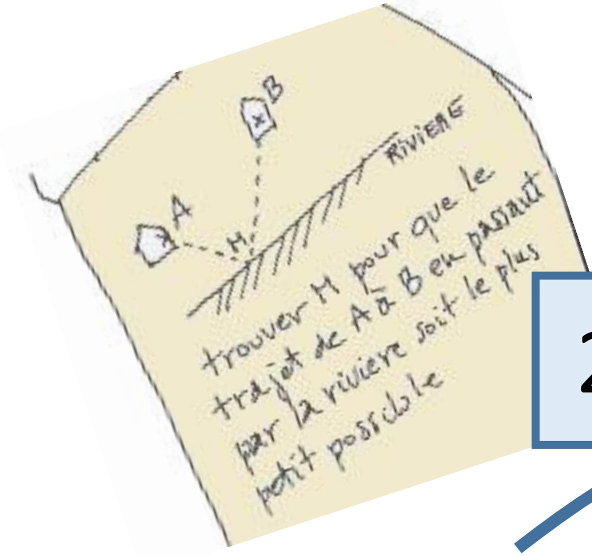
Un enseignement fondé sur les problèmes de recherche



2005

2010

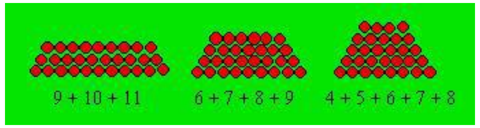




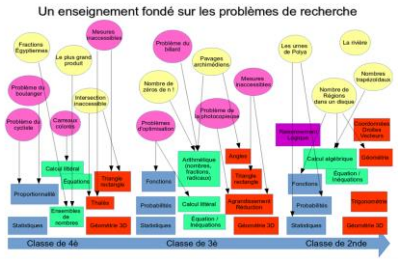
2011

I.R.E.M. de Montpellier

2013



2015



2019

Un petit voyage jalonné de problèmes au cœur de DREAM

Le site *ressource* de DREAM

http://dreamaths.univ-lyon1.fr/

Et un dernier problème pour la route !

Merci pour votre participation !

IREM

Groupe DREAM

http://dreamaths.univ-lyon1.fr

Pour suivre nos travaux et recevoir la newsletter, RDV sur notre site !

N°1 | Octobre 2019

Equipe DREAM

Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques

Un problème expliqué avec les mains...
par Gilles Aldon

L'ambition du site DREAM est de proposer des problèmes de mathématiques que les enseignants de l'école, du collège ou du lycée pourront utiliser dans leurs progressions pour développer chez leurs élèves les compétences fondamentales : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. Durant de nombreuses années, nous avons expérimenté dans différents niveaux de classe, avec différents enseignants, les problèmes que nous présentons ; les analyses proviennent ainsi de discussions, d'analyses, de recherches que nous essayons de mettre en mots le plus précisément possible, en rentrant parfois dans les détails qu'une discussion a mis en évidence ou qu'une analyse révèle et qui nous paraissent importants de signaler. Mais, cette précision rend parfois la lecture un peu aride et les développements mathématiques, essentiels à nos yeux pour comprendre l'intérêt d'un problème, peuvent aussi rebuter, dans un premier temps, nos lecteurs : devoir lire des pages et des pages avant même de savoir si le problème sera pertinent pour sa classe n'est certainement pas une bonne entrée pour promouvoir l'utilisation des problèmes dans l'enseigneme... L'expérience des formation... conçues et animées par l'é... DREAM nous a ainsi amene... ser une ... simple ... très vite l'in... et ses développe... pourquoi ... série de vidéos, intitu... **problème expliqué... mains »**. La ... réalisée concerne « **problème qui déchire »**, ... problème d'arithmétique ... met bien en avant la dimen... expérimentale des situations didactiques de recherche de problèmes. A voir à cette adresse !

QR Vidéo

1

L'actualité du groupe DREAM

Notre groupe, affilié à l'IREM de Lyon et l'IFé, organise une formation de formateurs intitulée « Comment mettre ... œuvre des ... blèmes ... de ... chercher, ...

Formation à l'IFÉ

Découvrez notre site, riche en ressources et supports autour des « problèmes pour chercher » et de leur mise en œuvre.