ET SI ON ARTICULAIT LES LOIS À DENSITÉ ET LE CALCUL INTÉGRAL AU LYCÉE ?

DES EXPÉRIMENTATIONS EN TERMINALE S, UN AVENIR EN MATHS COMPLÉMENTAIRES EN TERMINALE ?

Sylvie Alory, Professeure de maths au lycée La Fontaine, Paris (16è)
Charlotte Derouet, Enseignante-chercheure en didactique des mathématiques à l'INSPE de l'académie Strasbourg

12ème édition de la Journée académique - 16 janvier 2020

Contexte

- Une thèse

La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale scientifique

Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral

Encadrée par Alain Kuzniak & Fabrice Vandebrouck,

soutenue en novembre 2016

Mais avec les nouveaux programmes ?

- Maths spécialité : ☹

  - **Calcul intégral**

La définition de l’intégrale s’appuie sur la notion intuitive d’aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l’intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

  – *Disparition des lois à densité*

Mais avec les nouveaux programmes ?

- Maths expertes : ☹
  - *Absence de calcul intégral / lois à densité*

Mais avec les nouveaux programmes ?

- Maths complémentaires : ☺

Intégration

On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On met en relation les écritures $\int_a^b f(x)\ dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a,b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f.
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Lois à densité

Contenus

- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$.
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.

- Loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a,b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Problématique de la recherche

Les lois à densité

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (*)$$

Les lois à densité

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad (*)$$

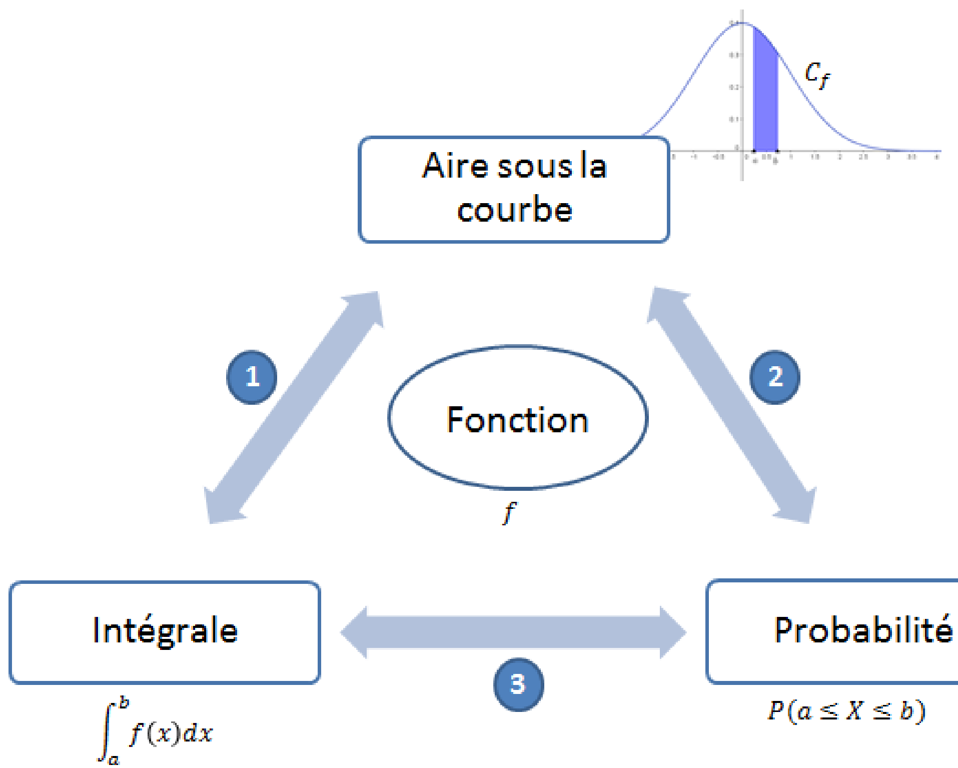
Domaine	Probabilités	Analyse
Sous-domaine	Probabilités à densité	Calcul intégral

Question de départ

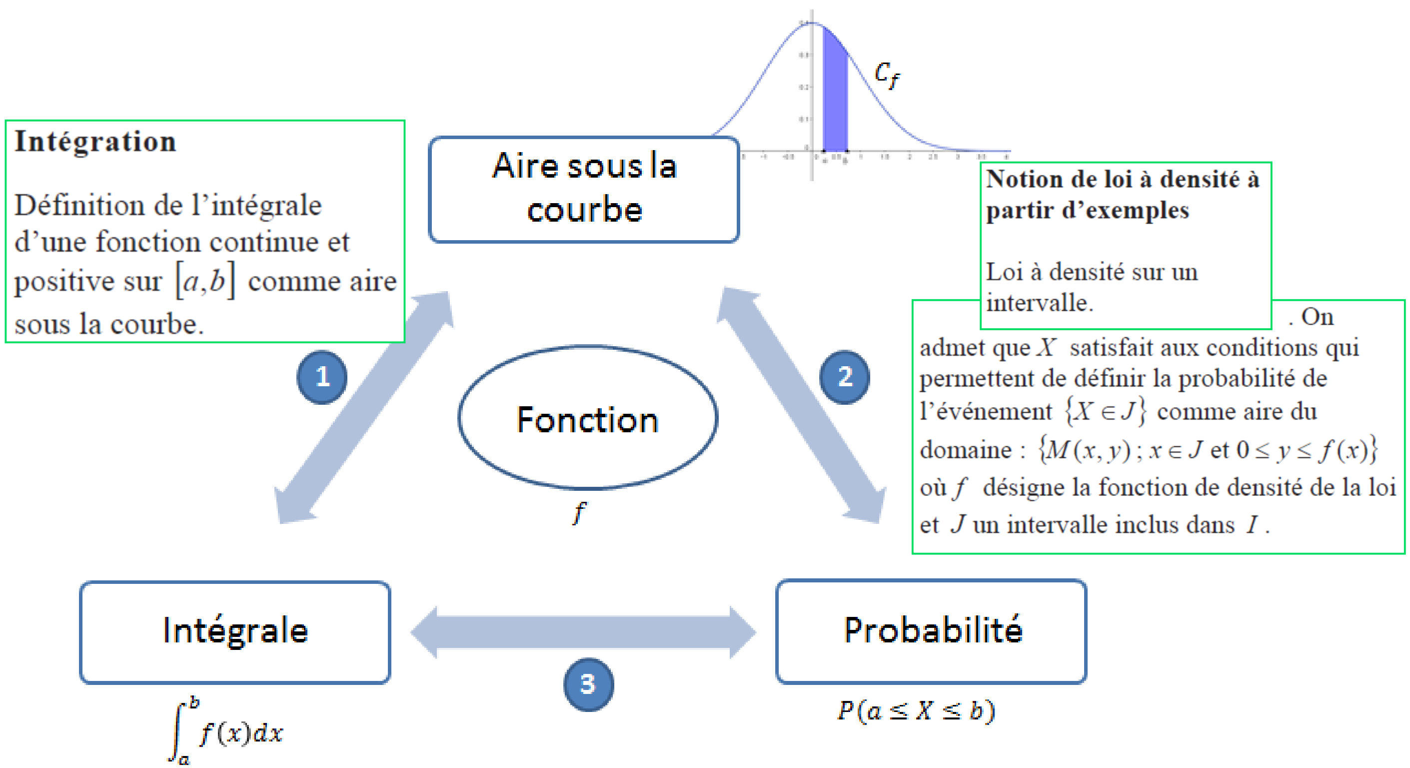
Est-il possible de concevoir et de mettre en œuvre des problèmes d’introduction aux lois à densité qui permettent aux élèves de terminale S de construire conceptuellement la relation

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \ \ (*) \ ?$$

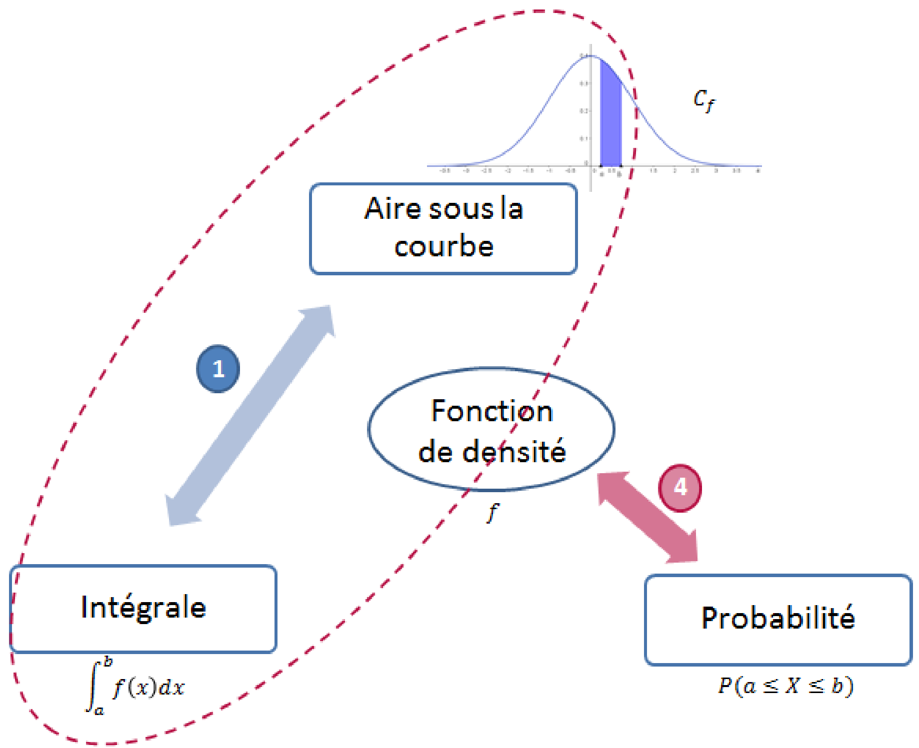
Liens entre trois objets mathématiques



Liens entre trois objets mathématiques



Le rôle central de la fonction de densité



Comment introduire la fonction de densité dans les classes ?

- Dans le programme :
  - *Pas de proposition, mis à part pour la loi normale centrée réduite (théorème de Moivre Laplace)*

- Dans le document *Ressources* Probabilités et Statistique :
  - *Pas de proposition. Beaucoup centré sur le théorème de Moivre Laplace.*
  - *Il est mentionné une approche différente par rapport à l'ancien programme, mais cette différence n'est pas explicitée.*

Comment introduire la fonction de densité dans les classes ?

- Des propositions dans les manuels

Introduction de la fonction de densité	A l'aide d'un problème de cible	A l'aide d'un polynôme des fréquences cumulées	A l'aide d'un histogramme de fréquences	Pas d'introduction
Nombre de manuels	**1**	**1**	**5**	**1**

Comment introduire la fonction de densité dans les classes ?

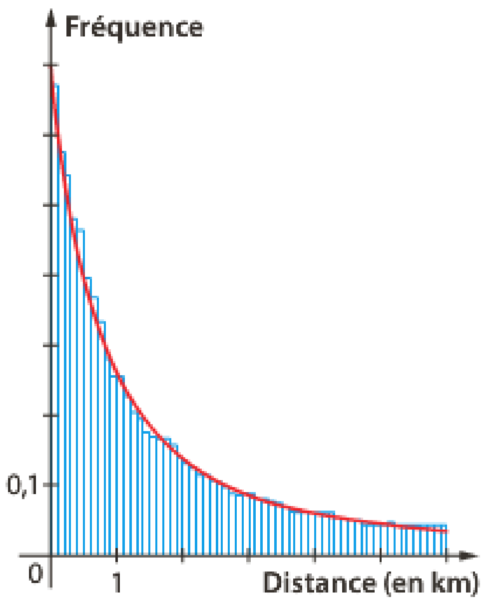
- Des propositions dans les manuels

Introduction de la fonction de densité	A l'aide d'un problème de cible	A l'aide d'un polynôme des fréquences cumulées	A l'aide d'un histogramme de fréquences	Pas d'introduction
Nombre de manuels	**1**	**1**	**5**	**1**

Exemple du manuel *Indice*

1 L'éco-point

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 6[$.
On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.



1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.
b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?
c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?
d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \ldots ; 5,8 ; 5,9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0 ; t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.
Cette courbe représente une fonction f continue sur [0 ; 6], appelée ***densité de probabilité*** *de la loi de X.*
a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.
b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0 ; 6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

Résultats sur l’étude des manuels

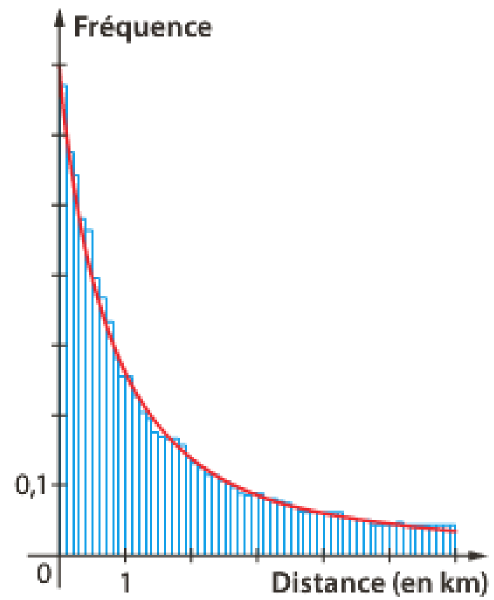
- Des tentatives d’introduction
- Un travail de visualisation essentiellement : courbe de densité toujours tracée (excepté une fois)
- Peu de mobilisation du référentiel théorique

Exemple du manuel *Indice*

1 L'éco-point

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 6[$.

On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.



1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.

b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?

c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?

d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \ldots ; 5,8 ; 5,9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0 ; t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.

Cette courbe représente une fonction f continue sur $[0 ; 6]$, appelée ***densité de probabilité*** *de la loi de X.*

a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.

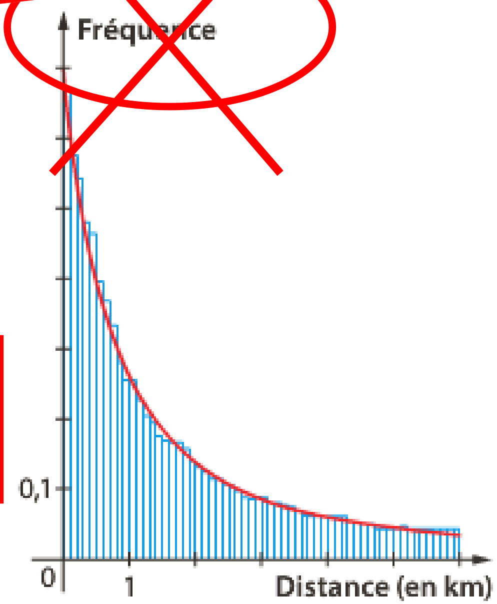
b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0 ; 6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

Exemple du manuel *Indice*

1 L'éco-point

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 6[$.

On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.



1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.

b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?

c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?

d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 5,8 ; 5,9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0 ; t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.

Cette courbe représente une fonction f continue sur [0 ; 6], appelée ***densité de probabilité*** *de la loi de X.*

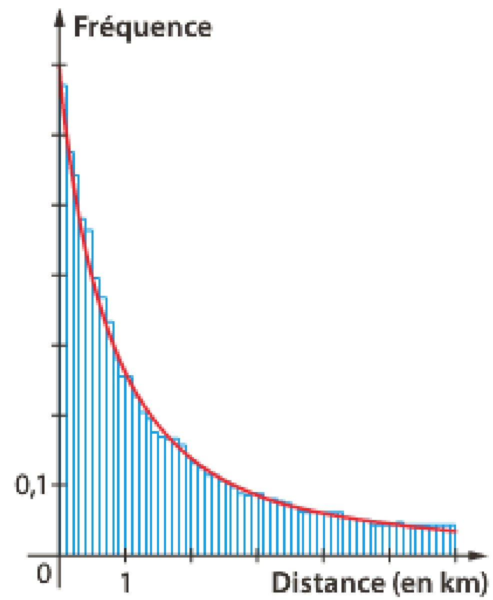
a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.

b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0 ; 6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

Exemple du manuel *Indice*

1 L'éco-point

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 6[$.
On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.



1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.
b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?
c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?
d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 5,8 ; 5,9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0 ; t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.

*Cette courbe représente une fonction f continue sur [0 ; 6], appelée **densité de probabilité** de la loi de X.*
a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.
b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0 ; 6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

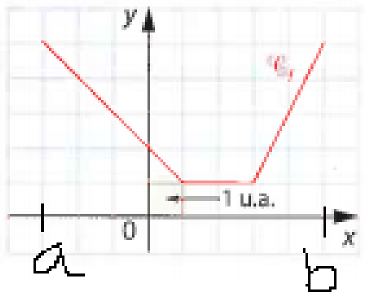
Résultats sur l’étude des manuels

- Des tentatives d’introduction
- Un travail de visualisation essentiellement : courbe de densité toujours tracée (excepté une fois)
- Peu de mobilisation du référentiel théorique
- Des erreurs dans les représentations des histogrammes, qui empêchent la compréhension de la densité (histogrammes trop parfaits…)
- Les propriétés caractéristiques de la fonction de densité imposées, n’émergent pas des activités
- Différentes démarches, mais pas de modélisation

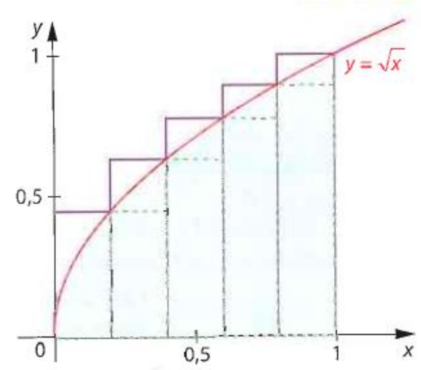
Progression traditionnelle en calcul intégral

- 1) Calculs d'aires sous des courbes de fonctions affines par morceaux

La fonction f est continue sur [– 3 ; 5].

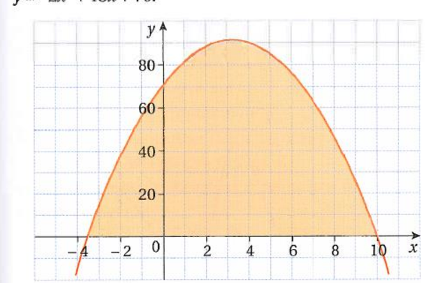


- 2) Calcul approché d'aires (méthode des rectangles…)

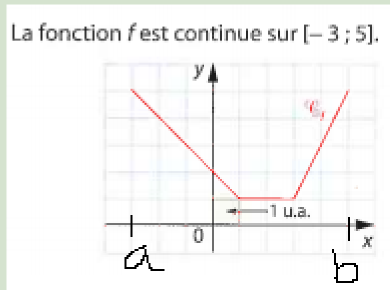
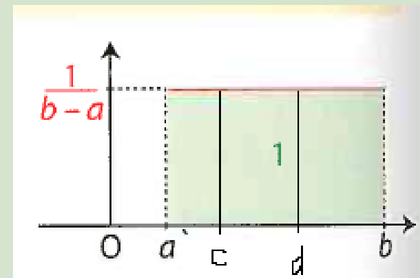
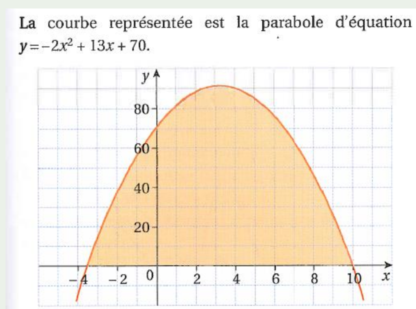
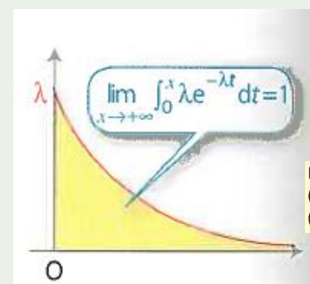
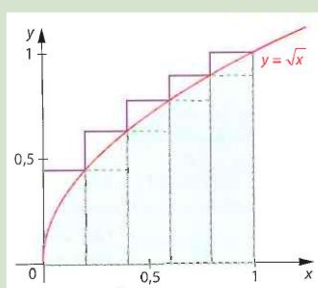
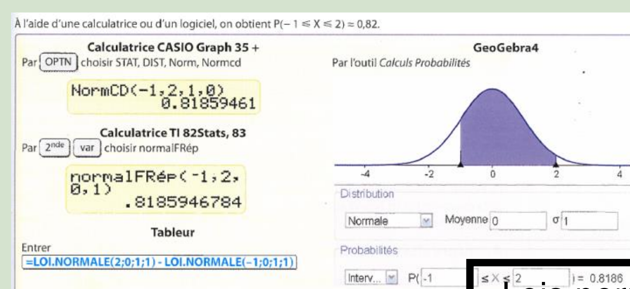


- 3) Calculs d'aires à l'aide de primitives

La courbe représentée est la parabole d'équation $y = -2x^2 + 13x + 70$.



Des aires similaires

	Calcul intégral	Lois à densité
Calcul d'aires élémentaires		 Lois uniformes
Calcul d'aires par primitivation		 Lois exponentielles Pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans $[0\,;+\infty[$: (1) $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ (2) $P(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$
Calcul approché d'aires		 À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, on obtient $P(-1 \leqslant X \leqslant 2) \approx 0,82$. Calculatrice CASIO Graph 35 + : Par OPTN choisir STAT, DIST, Norm, Normcd — NormCD(-1,2,1,0) 0.81859461 Calculatrice TI 82Stats, 83 : Par 2nde var choisir normalFRép — normalFRép(-1,2,0,1) .8185946784 Tableur : Entrer =LOI.NORMALE(2;0;1;1) - LOI.NORMALE(-1;0;1;1) GeoGebra4 : Par l'outil Calculs Probabilités — Normale, Moyenne 0, σ 1, P(-1 ≤ X ≤ 2) = 0.8186 Lois normales

Pistes à explorer

Objectif de la recherche : Proposer une introduction de la notion de fonction de densité qui permette de lui donner plus de sens

- Réponse à un problème
- Statistique descriptive, données statistiques réelles
- Histogramme mais une nouvelle première rencontre s'impose
- Laisser les élèves chercher la fonction de densité (ajustement)
- Exploiter les liens des niveaux des calculs d'aire (A1/A2/A3)

Une ingénierie didactique collaborative

- Travail collaboratif enseignant/chercheur

- Avec des contraintes : que les séances proposées soient réalisables dans une classe « ordinaire » (sans conditions particulières)
  - *Contraintes de temps*
  - *Contraintes de résultats*
  - *Contraintes de proximité avec les habitudes de l'enseignante*

Idée générale de l'ingénierie

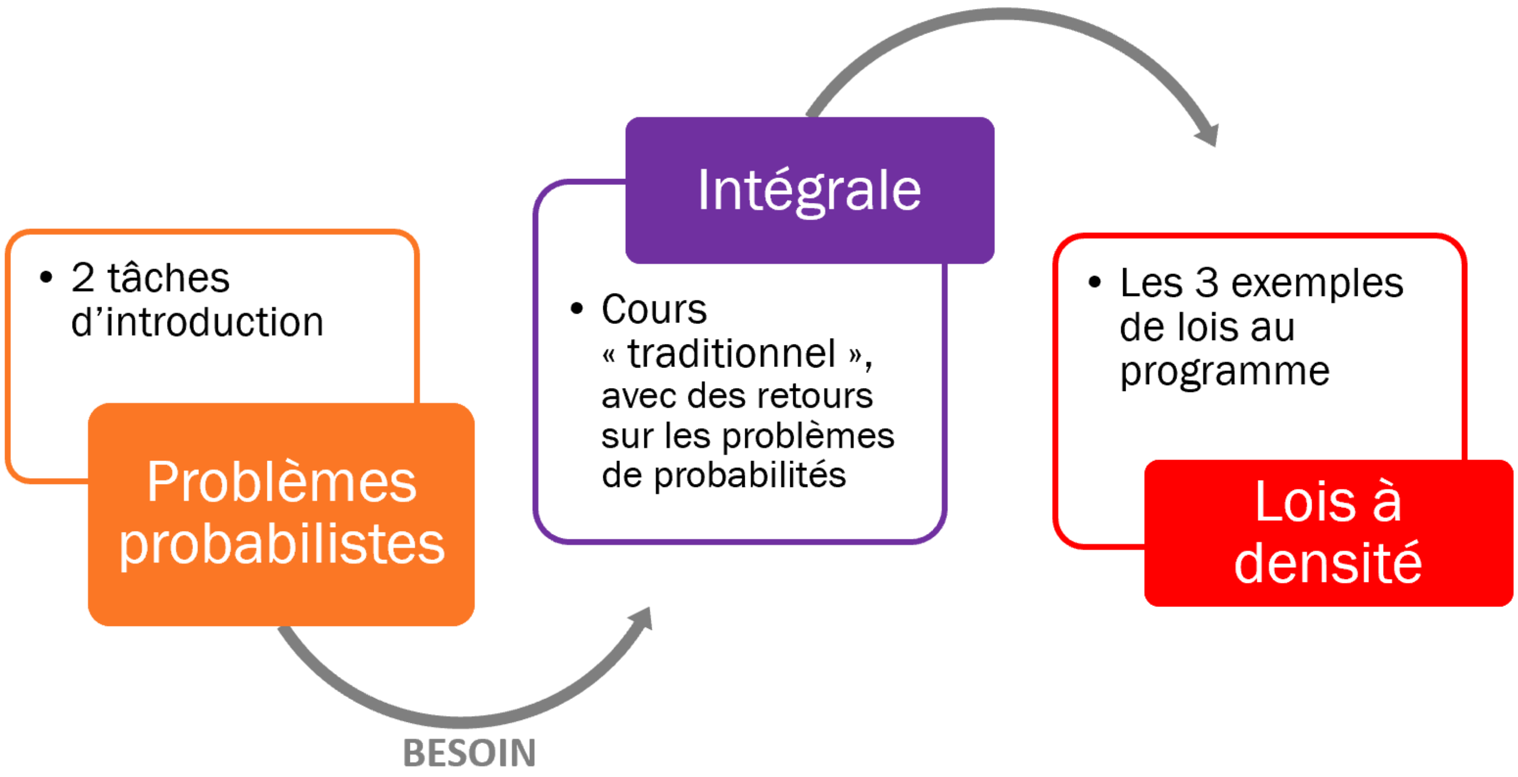
Intégrale

- Cours « traditionnel »

- Les 3 exemples de lois au programme

Lois à densité

Idée générale de l’ingénierie



Plan de la séquence

Lois à densité (sans la loi normale) et calcul intégral (le cas des fonctions continues positives)

- Des anticipations
  - Aire finie d'un domaine infini, longueur finie d'une ligne infinie (DM)
  - Familiarisation avec les fonctions

    $$x \longmapsto ke^{-kx}$$
  - Variables aléatoires discrètes
  - DM préparatoire : rappel sur les histogrammes ; notion de densité de fréquence ; première rencontre avec une variable aléatoire continue (loi uniforme sur un segment).
- Introduction : Deux problèmes de modélisation
  - *Problème 1 : le problème de la rencontre*
  - *Problème 2 : le problème du volcan Aso*
- Cours / Exercices : sur les deux thèmes

Le devoir maison préparatoire : la notion d’histogramme

Thème	Population
Sous-thème	Évolution et structure de la population

POP1A - Population par âge regroupé en 2011

Commune de Paris

Population totale par âge regroupé

	Effectif
Moins de 3 ans	73946
3 à 5 ans	65679
6 à 10 ans	103810
11 à 17 ans	140886
18 à 24 ans	244026
25 à 39 ans	598565
40 à 54 ans	435966
55 à 64 ans	257600
65 à 79 ans	222118
80 ans ou plus	107378
Ensemble	2249975

Source : Insee, RP2011 exploitation principale.

La densité de fréquence

- Analogie avec la densité de population

« En 2005, Monaco avait 32 543 habitants et la Japon 127 417 244 (source : Institut nationale d'études démographiques). Bien sûr, les démographes diront que ces renseignements sont très largement insuffisants pour comparer la démographie des deux pays : il faut au minimum s'intéresser aux superficies de ces deux pays et calculer pour chacun la densité de population, c'est-à-dire le nombre d'habitants au kilomètre carré. Avec une superficie de 2,02 km^2 *pour Monaco et de 378000* km^2 *pour le Japon, les densités sont respectivement* $d_1 = \frac{32\,543}{2{,}02} = 16\,110{,}40 h/km^2$ *pour Monaco et* $\mathrm{d}_2 = \frac{127\,417\,244}{378\,000} = 337 h/km^2$ *pour le Japon. Autrement dit, alors que la population de Monaco est la moins importante en taille, sa densité est plus importante que celle du Japon* » (p. 11).

Thème Population
Sous-thème Évolution et structure de la population
POP1A - Population par âge regroupé en 2011
Commune de Paris

Population totale par âge regroupé

	Effectif
Moins de 3 ans	73946
3 à 5 ans	65679
6 à 10 ans	103810
11 à 17 ans	140886
18 à 24 ans	244026
25 à 39 ans	598565
40 à 54 ans	435966
55 à 64 ans	257600
65 à 79 ans	222118
80 ans ou plus	107378
Ensemble	2249974

Source : Insee, RP2011 exploitation principale.

Age	Fréquence
[0 ; 3[	0,03
[3 ; 6[	0,03
[6 ; 11[	0,05
[11 ; 18[	0,06
[18 ; 25[	0,11
[25 ; 40[	0,27
[40 ; 55[	0,19
[55 ; 65[	0,11
[65 ; 80[	0,10
[80 ; 105[	0,05
Ensemble	1

Thème Population
Sous-thème Évolution et structure de la population
POP1A - Population par âge regroupé en 2011
Commune de Paris

Population totale par âge regroupé

	Effectif
Moins de 3 ans	73946
3 à 5 ans	65679
6 à 10 ans	103810
11 à 17 ans	140886
18 à 24 ans	244026
25 à 39 ans	598565
40 à 54 ans	435966
55 à 64 ans	257600
65 à 79 ans	222118
80 ans ou plus	107378
Ensemble	2249974

Source : Insee, RP2011 exploitation principale.

Age	Fréquence
[0 ; 3[	0,03
[3 ; 6[	0,03
[6 ; 11[	0,05
[11 ; 18[	0,06
[18 ; 25[	0,11
[25 ; 40[	0,27
[40 ; 55[	0,19
[55 ; 65[	0,11
[65 ; 80[	0,10
[80 ; 105[	0,05
Ensemble	1

Thème Population
Sous-thème Évolution et structure de la population
POP1A - Population par âge regroupé en 2011
Commune de Paris

Population totale par âge regroupé

	Effectif
Moins de 3 ans	73946
3 à 5 ans	65679
6 à 10 ans	103810
11 à 17 ans	140886
18 à 24 ans	244026
25 à 39 ans	598565
40 à 54 ans	435966
55 à 64 ans	257600
65 à 79 ans	222118
80 ans ou plus	107378
Ensemble	2249974

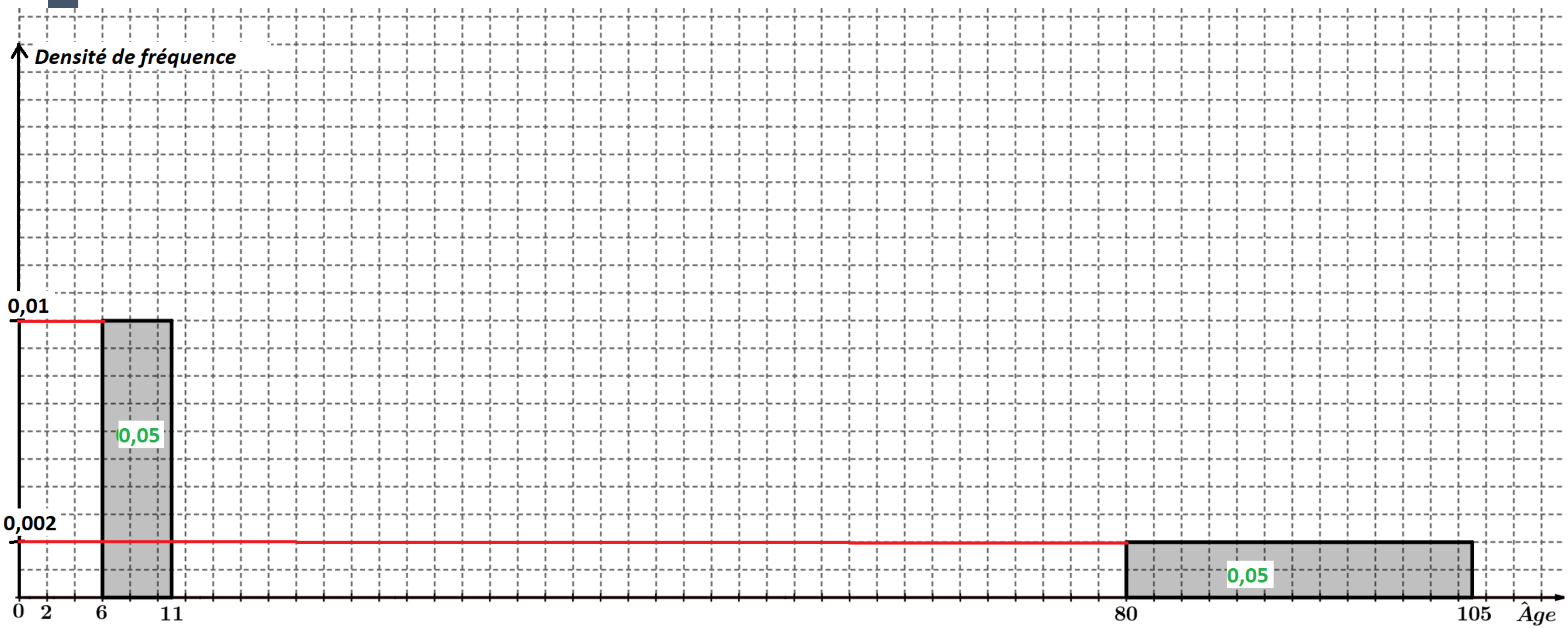
Source : Insee, RP2011 exploitation principale.

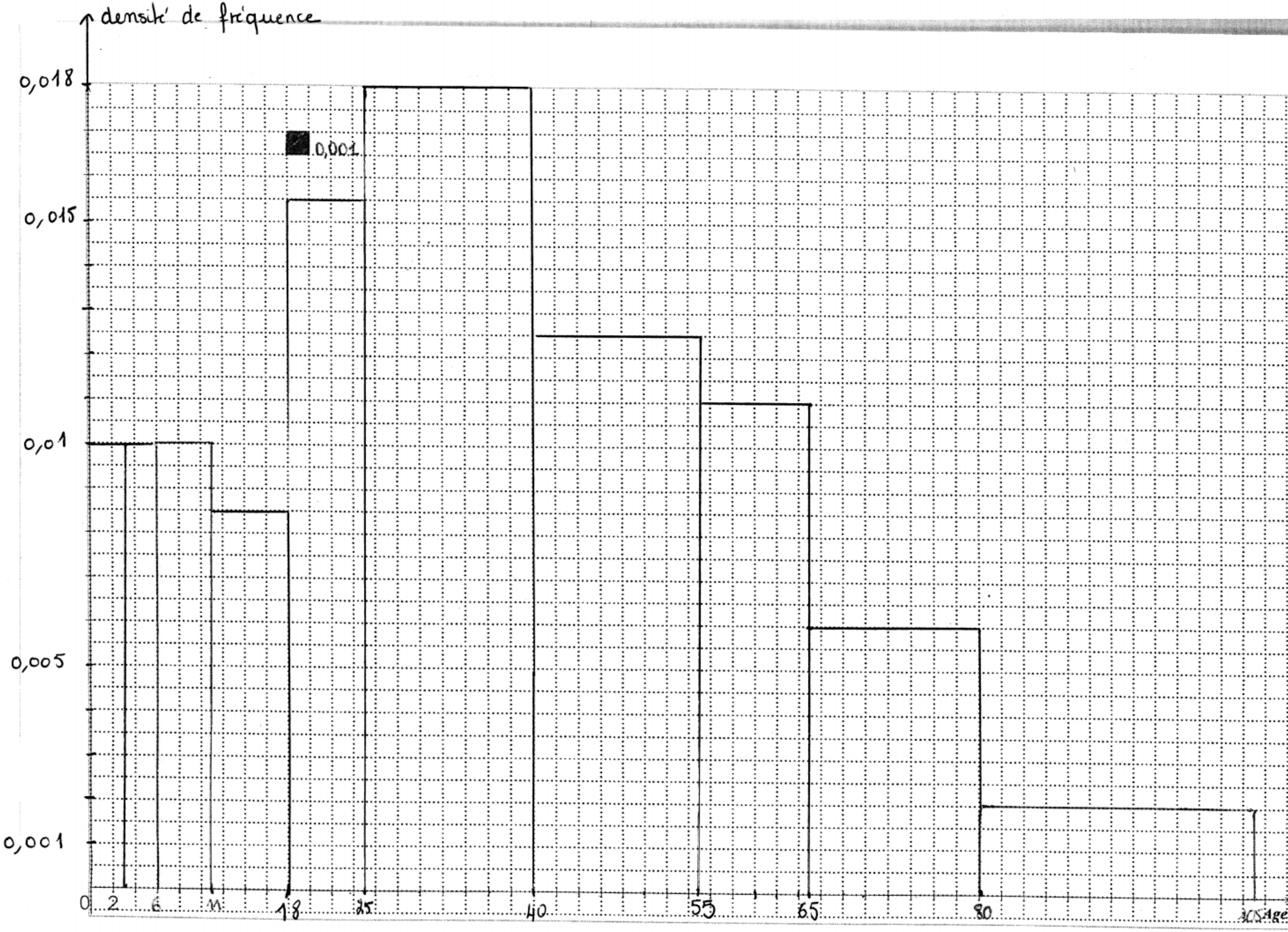
Age	Fréquence	
[0 ; 3[	0,03	
[3 ; 6[	0,03	
[6 ; 11[	0,05	0,01
[11 ; 18[	0,06	
[18 ; 25[	0,11	
[25 ; 40[	0,27	
[40 ; 55[	0,19	
[55 ; 65[	0,11	
[65 ; 80[	0,10	
[80 ; 105[	0,05	0,002
Ensemble	1	

Définitions

- Dans le cas d'une variable quantitative « continue », on définit la densité de fréquence $\mathrm{d_i}$ d'une classe de fréquence $\mathrm{f_i}$ et d'amplitude $\mathrm{a_i}$ par : $d_i = \frac{f_i}{a_i}$.
- Un histogramme de fréquences est un diagramme composé de rectangles collés dont les aires sont proportionnelles aux fréquences et dont les bases sont déterminées par les intervalles des classes.

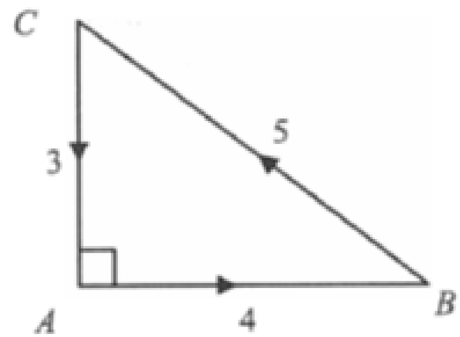
- Dans ce cas, l'axe des ordonnées est bien la densité de fréquence (à constante multiplicative près).


Densité de fréquence
0,01
0,002
0,05
0,05
0
2
6
11
80
105
Âge


densité de fréquence
0,018
0,015
0,01
0,005
0,001
0,001
0
2
6
11
18
25
40
55
65
80
105
Age

Le devoir maison préparatoire : la première rencontre avec une variable aléatoire continue

Une puce électronique se déplace à vitesse constante sur le « pourtour » d'un triangle, toujours dans le même sens (indiqué par la flèche). On suppose que la puce démarre au point C.

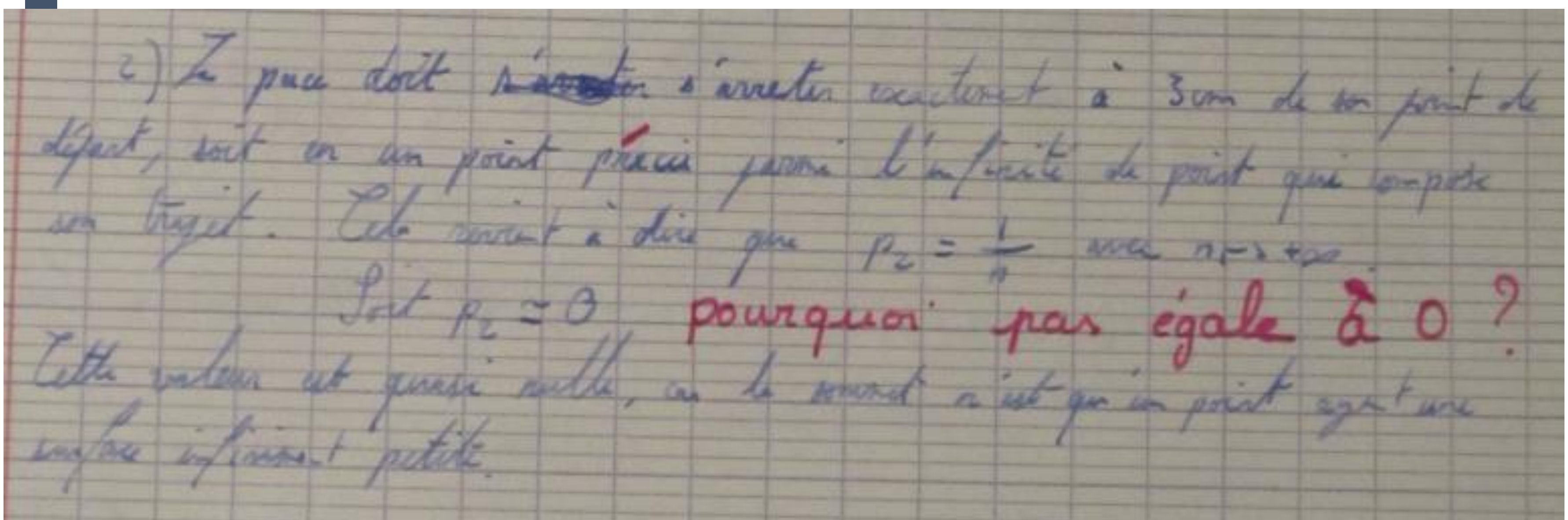


Une panne se produit subitement et la puce s'arrête instantanément.

- Conjectures
- Simulations
- Calculs théoriques

Quelle est la probabilité p_1 que la puce s'arrête sur l'hypoténuse ?
Quelle est la probabilité p_2 que la puce s'arrête au sommet de l'angle droit ?
Commenter la valeur de p_2 obtenue.

La difficulté : probabilité nulle d'un événement non impossible


2) La puce doit ~~s'arrêter~~ s'arrêter exactement à 3cm de son point de départ, soit en un point précis parmi l'infinité de point qui compose son trajet. Cela revient à dire que $P_2 = \frac{1}{n}$ avec $n \to +\infty$

Soit $P_2 \simeq 0$ pourquoi pas égale à 0 ?

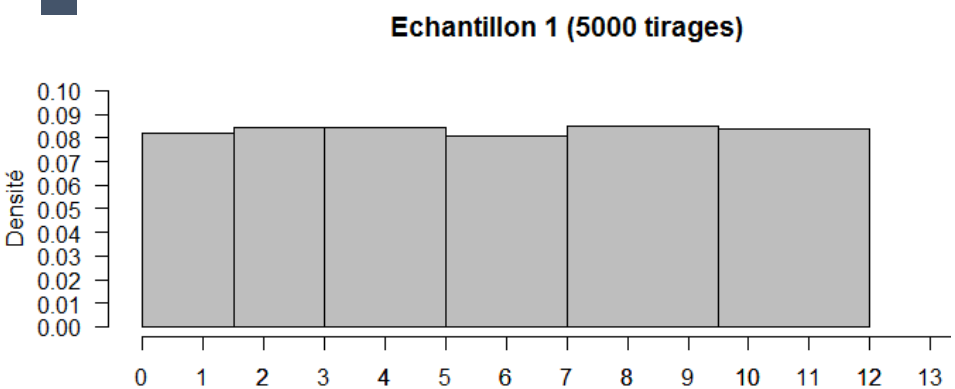
Cette valeur est presque nulle, car le segment n'est qu'un point ayant une surface infiniment petite.

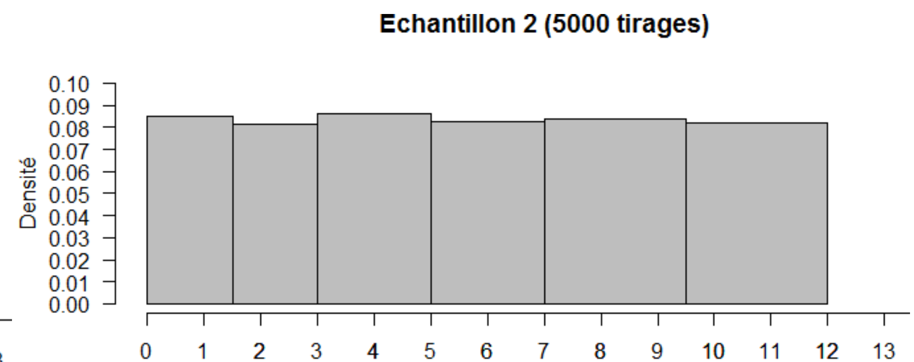
Les réponses 2017

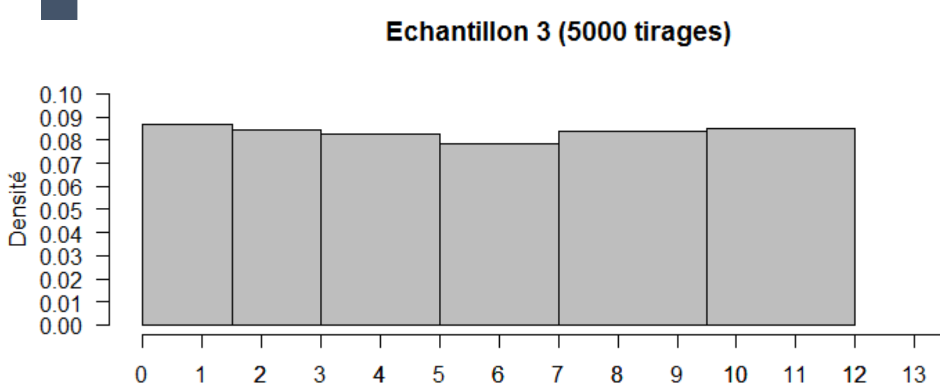
p_2 est infiniment petite, infime , $\boldsymbol{p_2 = \frac{1}{\infty}}$	9 élèves
p_2 est quasi-nulle, proche de zéro	3 élèves
$\boldsymbol{p_2 = \frac{1}{12}}$	9 élèves
$p_2 = 0\ car\ 1/\infty$	4 élèves
On ne peut pas calculer La probabilité est infime mais pas nulle. Je trouve $p_2 = 0$ mais je n'y crois pas.	1 élève 3 élèves 1 élève

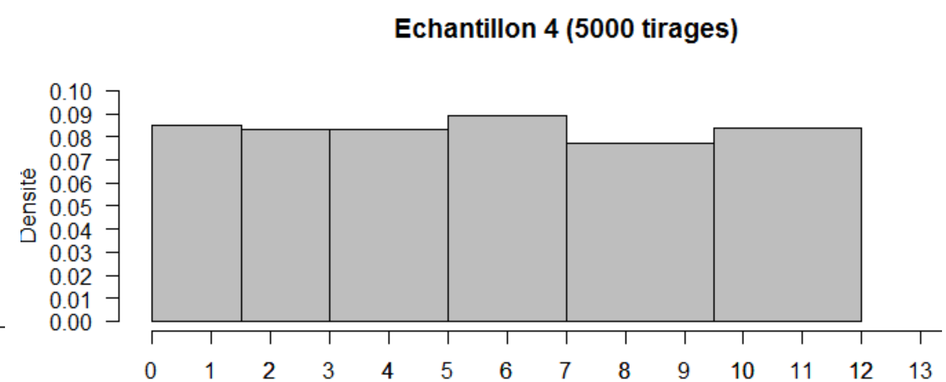
Le devoir maison préparatoire : la première rencontre avec une variable aléatoire continue

On a ensuite simulé, plusieurs fois, le tirage de 5 000 nombres réels dans l'intervalle $[0\,;12]$. Voici plusieurs histogrammes obtenus :









Persistance

- Raisonnement théorique

f) L'aire au point 3, correspondant au sommet de l'angle droit, est la plus petite. Ainsi, on retrouve bien $p_2 \simeq B$.

A la fin de ce DM

- Des idées (plus) claires sur la notion d’histogramme (densité de fréquence)
- Démarche : Passage par la simulation et la construction d’histogrammes
- Rencontre avec une variable aléatoire différente de celles étudiées en première
- Une rupture : la probabilité d’un événement qui n’est pas impossible peut être nulle.
- Première rencontre avec une « courbe de tendance » dans le cas de la loi uniforme
  - *Aire sous la courbe égale à 1*
    calcul d’une probabilité par un calcul d’aire

Problème 1 : le problème de la rencontre

Enoncé donné aux élèves

Problème 1 :

Karine et Olivier décident de se retrouver au café de l'Hôtel de Ville entre 7h et 8h. Ils peuvent arriver à tout moment entre 7h et 8h. Que peut-on dire du temps d'attente du premier arrivé ?

Objectifs

- S'engager dans une démarche de modélisation
- Construire et comprendre ce qu'est une fonction de densité, en passant par les histogrammes de fréquence, dans le but de donner du sens au concept de fonction de densité.
- Arriver à un problème de calculs d'aires sous une courbe représentative d'une fonction affine (aires élémentaires).

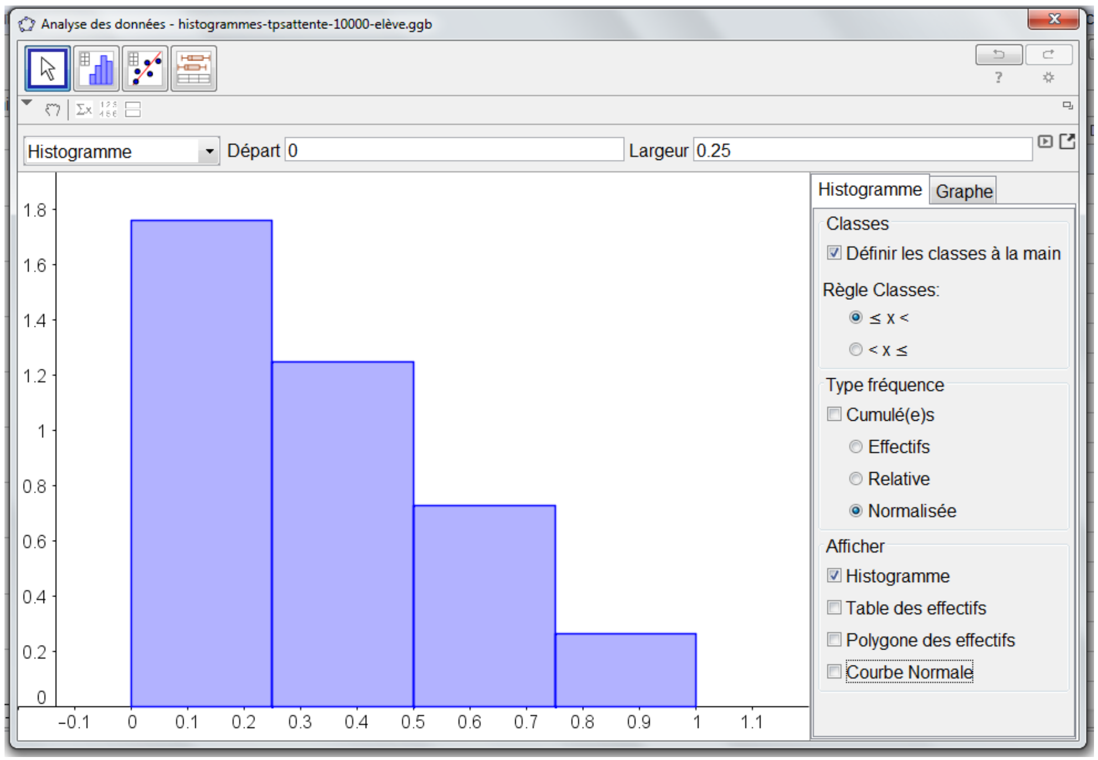
Déroulement

- Dévolution du problème, recherche individuelle

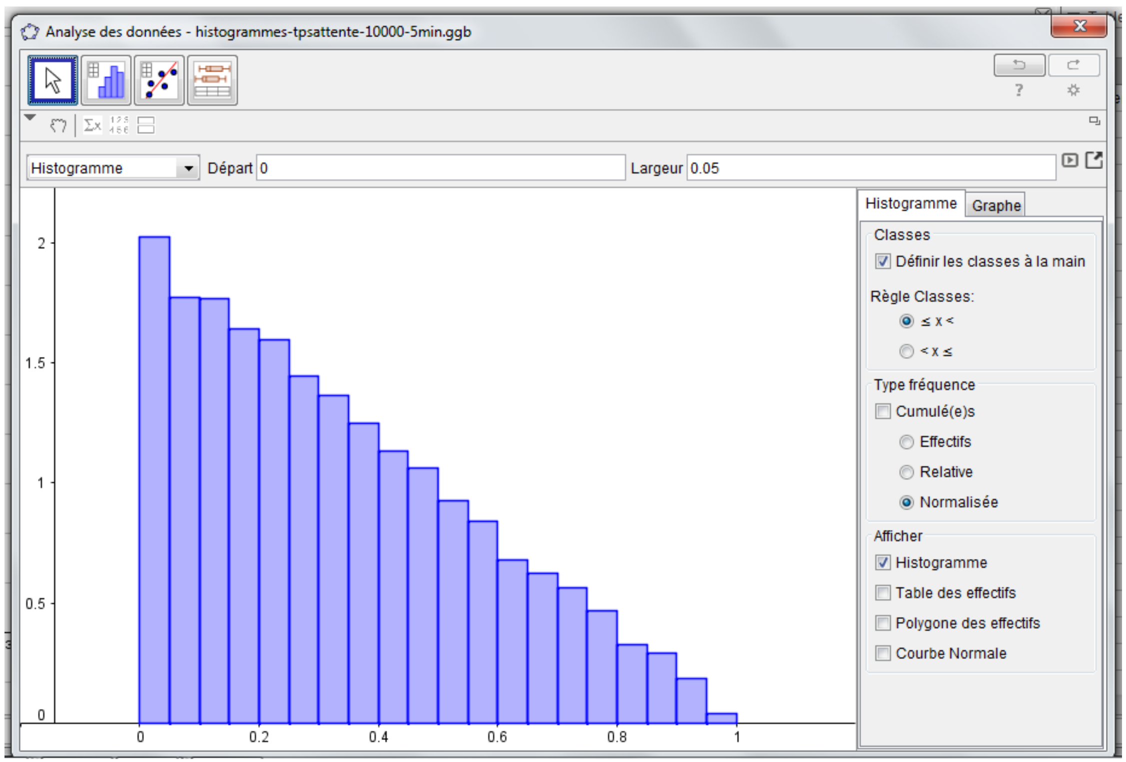
- Mise en commun :
  - *non réalisme de la situation*
  - *questions autour de la modélisation*
  - *notations, variables aléatoires continues sur [0;1]*
  - *remarques qualitatives*
  - *choix d'un exemple*
  - *proposition de faire une simulation, histogramme*

- histogrammes-tpsattente-10000

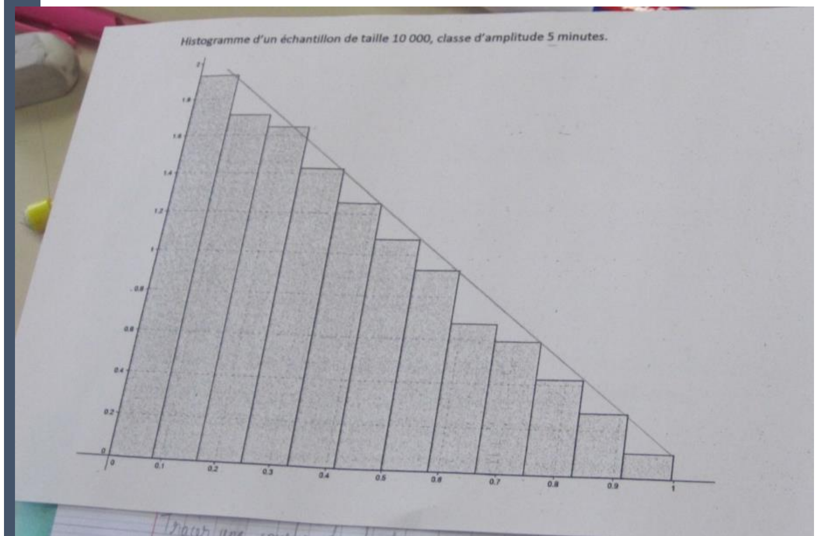
Histogramme d'amplitude 15 min

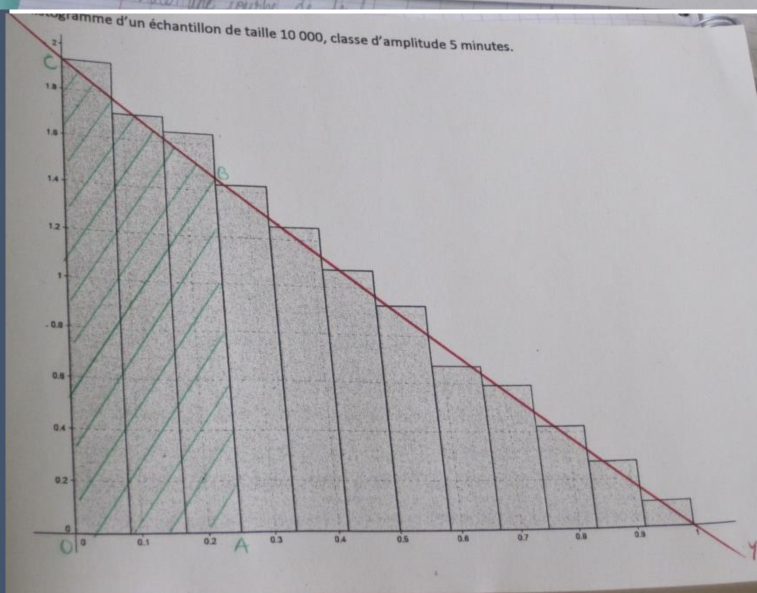


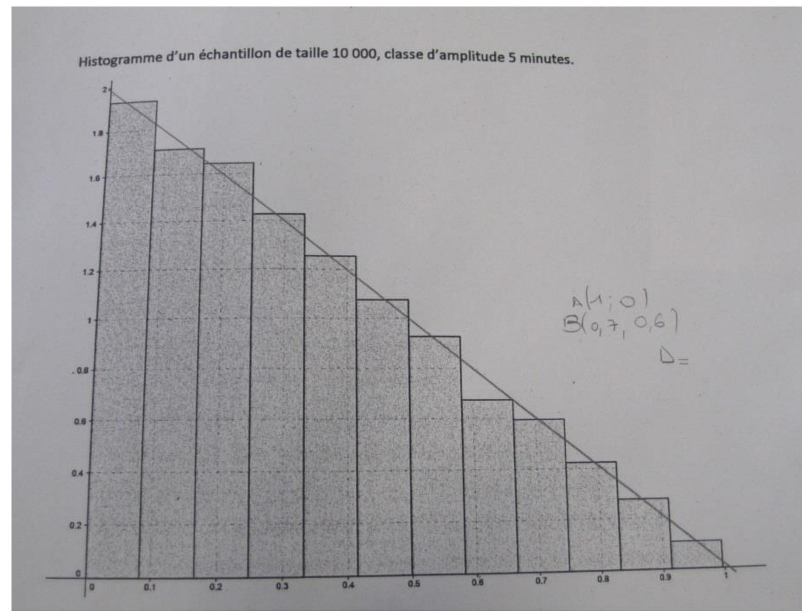
Histogramme d'amplitude 0,05 (demande des élèves)

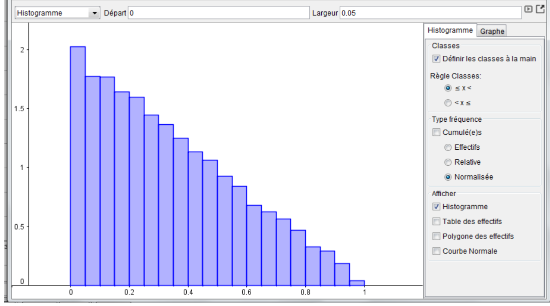


Tracé de courbe de tendance









- Discussion sur cette fonction : on doit tous avoir la même

  → Quelles conditions sur cette fonction ?

$$f(1) = 0$$

Et

Aire sous la courbe égale à 1.

Recherche de l'expression de f

$$\rightarrow f(x) = -2x + 2$$

Application

Exercice 1 : En utilisant le modèle mis en place, répondez aux questions suivantes.

a) Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende plus de 40 minutes ?
b) Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende moins de 40 minutes ?
c) Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende entre 20 et 40 minutes ?
d) Quelle est la probabilité que Karine et Olivier arrivent en même temps ?
e) Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende exactement 40 minutes ?
f) Finalement, ils ont décidé de ne pas attendre plus d'un quart d'heure. Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent ?
g) Le premier arrivé a attendu moins d'une demi-heure. Quelle est la probabilité pour qu'il ait attendu plus d'un quart d'heure ?

Pour le bilan

- Pour la séance suivante : faire une synthèse du pb 1
- L'enseignante a ensuite fait un bilan des synthèses individuelles (distribué au début de la séance suivante)

Problème 2 : le problème du volcan Aso

Objectifs

- A partir de données réelles, créer un modèle probabiliste
- Revenir sur la notion de fonction de densité (sur un ensemble non borné)
- Arriver à un problème de calculs d'aires sous une courbe représentative d'une fonction non affine par morceaux
- Evaluer l'aire sous une courbe quelconque

Enoncé donné aux élèves

Problème 2 : Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des volcans les plus actifs au monde. On possède un relevé précis de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIII^{e} siècle. Dans le tableau ci-dessous, nous disposons de ces données pour la période allant du XIII^{e} au XXI^{e} siècle. Nous nous s'intéressons au temps écoulé, en années, entre deux éruptions successives.

Donnée n°	Année	Temps d'attente	Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229		38	1582	6
2	1239	10	39	1583	1
3	1240	1	40	1584	1
4	1265	25	41	1587	3
5	1269	4	42	1598	11
6	1270	1	43	1611	13
7	1272	2	44	1612	1
8	1273	1	45	1613	1
9	1274	1	46	1620	7
10	1281	7	47	1631	11
11	1286	5	48	1637	6
12	1305	19	49	1649	12
13	1324	19	50	1668	19
14	1331	7	51	1675	7
15	1335	4	52	1683	8
16	1340	5	53	1691	8
17	1346	6	54	1708	17
18	1369	23	55	1709	1
19	1375	6	56	1765	56
20	1376	1	57	1772	7
21	1377	1	58	1780	8
22	1387	10	59	1804	24
23	1388	1	60	1806	2
24	1434	46	61	1814	8
25	1438	4	62	1815	1
26	1473	35	63	1826	11
27	1485	12	64	1827	1
28	1505	20	65	1828	1
29	1506	1	66	1829	1
30	1522	16	67	1830	1
31	1533	11	68	1854	24
32	1542	9	69	1872	18
33	1558	16	70	1874	2
34	1562	4	71	1884	10
35	1563	1	72	1894	10
36	1564	1	73	1897	3
37	1576	12			

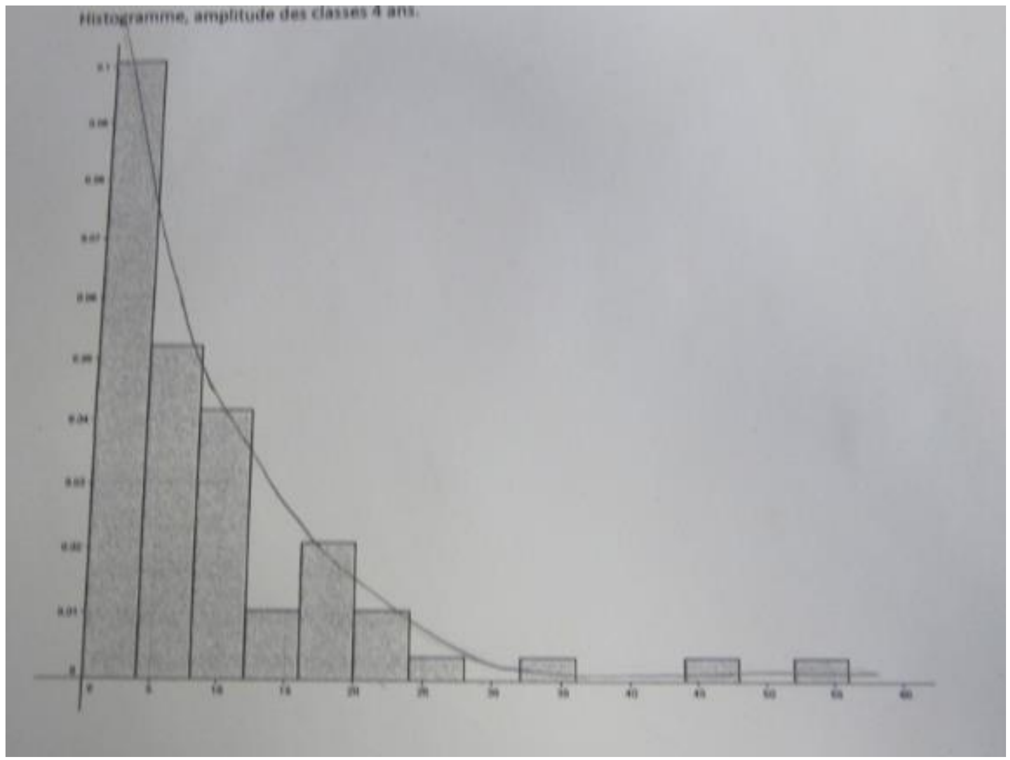
Enoncé en 2015
Question : (le 27 mars 2015) Le volcan Aso est actuellement en éruption.
Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption ait lieu :
a) Dans les 5 ans ?
b) Au cours de l'année 2030 ?

Enoncé en 2016
(Ajout des éruptions de 1897 à nos jours)
Question : La dernière éruption du volcan Aso a eu lieu au cours du mois de septembre 2015.
Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption ait lieu au cours de l'année 2030 ?

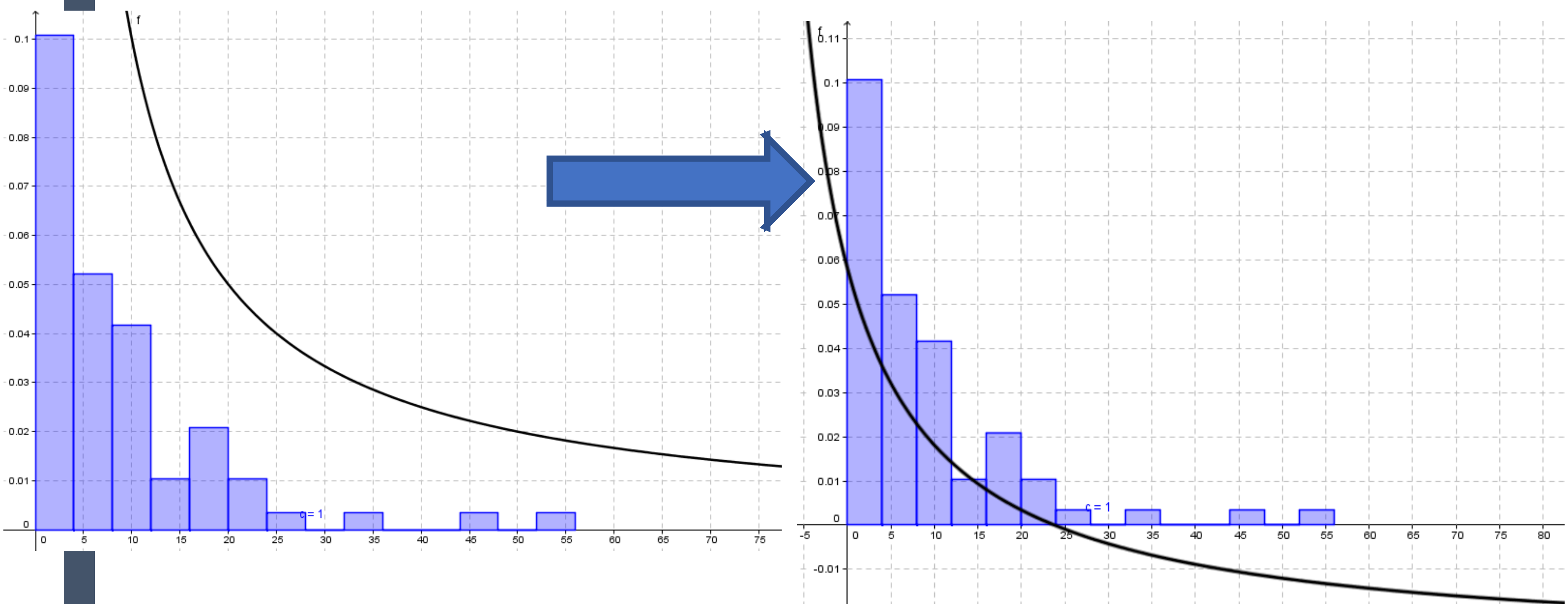

Sous-tâche 1 :
Regrouper les données sous forme d'un tableau d'effectifs et de fréquences.
Sous-tâche 2 :
Tracer un histogramme avec les données.
Tâches :
Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption :
a) Ait lieu dans les 5 ans ?
b) Au cours de l'année 2030 ?
Sous-tâche 3 :
Déterminer l'expression de la fonction de densité.
Sous-tâche 4 :
Retour à la tâche a)
Sous-tâche 5 :
Retour à la tâche b)

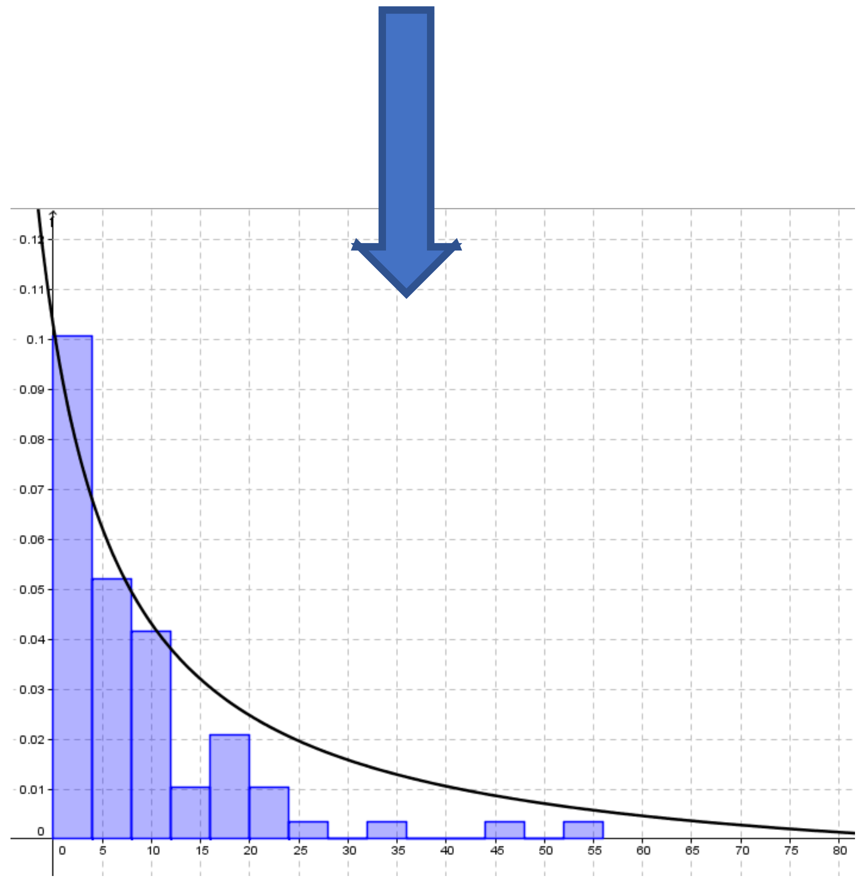
Déroulement

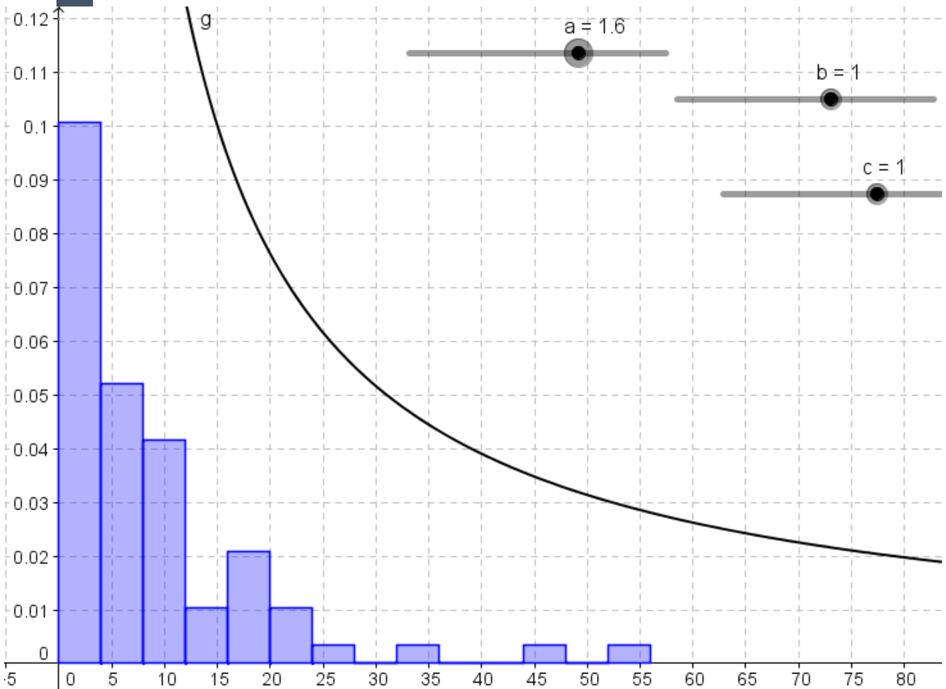
- Prise en main du problème ; les élèves travaillent en binôme.
- Les élèves se proposent de faire un histogramme et commencent par regrouper les données en classe d'amplitude 4 ou 5 ans. Certains binômes ne choisissent pas des classes de même amplitude.
  L'objectif est clair pour eux : construire un histogramme pour trouver la fonction qui permettra d'évaluer la probabilité demandée.
- La discussion s'effectue en groupe classe. Des élèves proposent des fonctions candidates. On rappelle les conditions que doit vérifier la fonction cherchée.
  Un histogramme préparé par l'enseignant avec Géogebra permet de tester les propositions des élèves.
  fichier géogebra
  test-densite
- Un consensus se fait pour le candidat :
  $f(x) = 0{,}1e^{-0{,}1x}$ définie sur $[0; +\infty[$

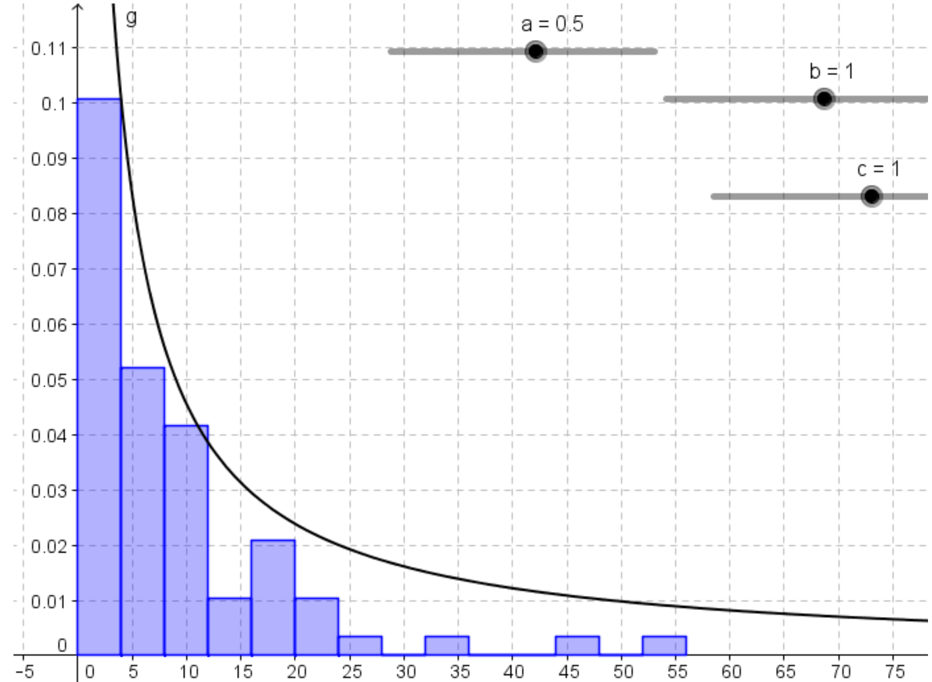

Histogramme, amplitude des classes 4 ans.

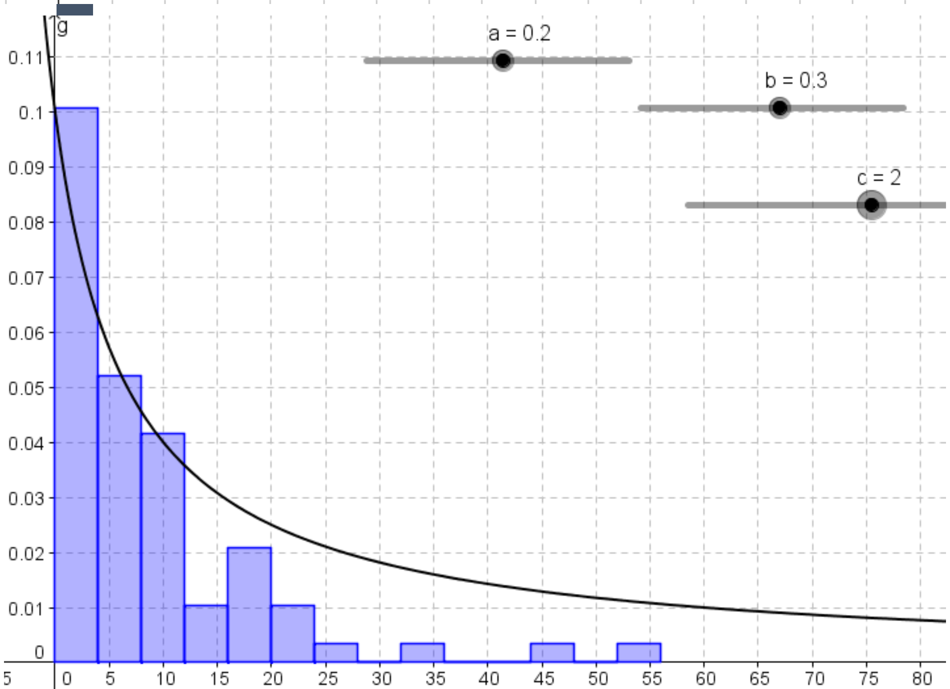
Réfutation des fonctions inverses

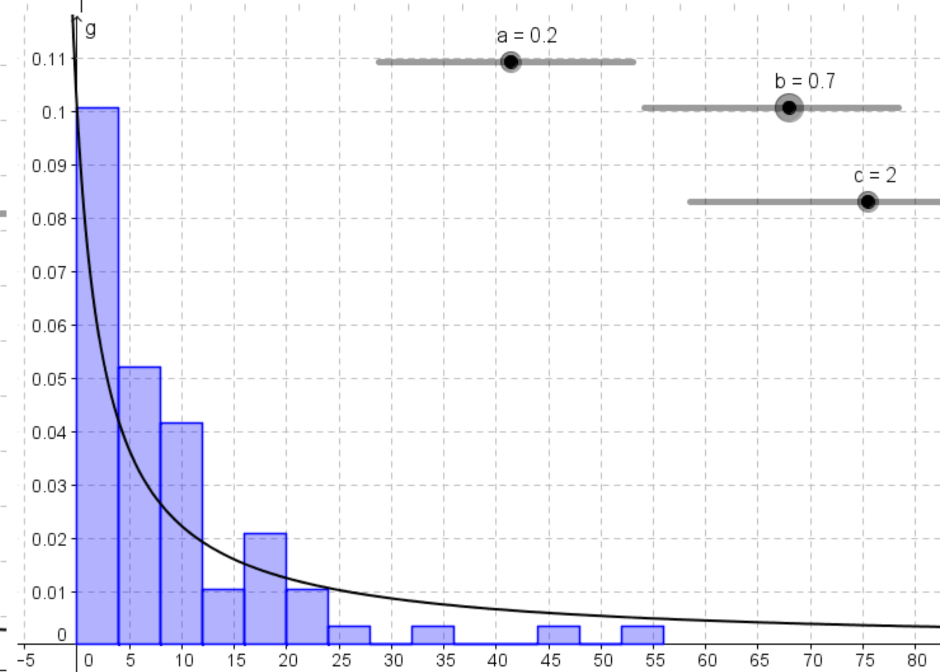


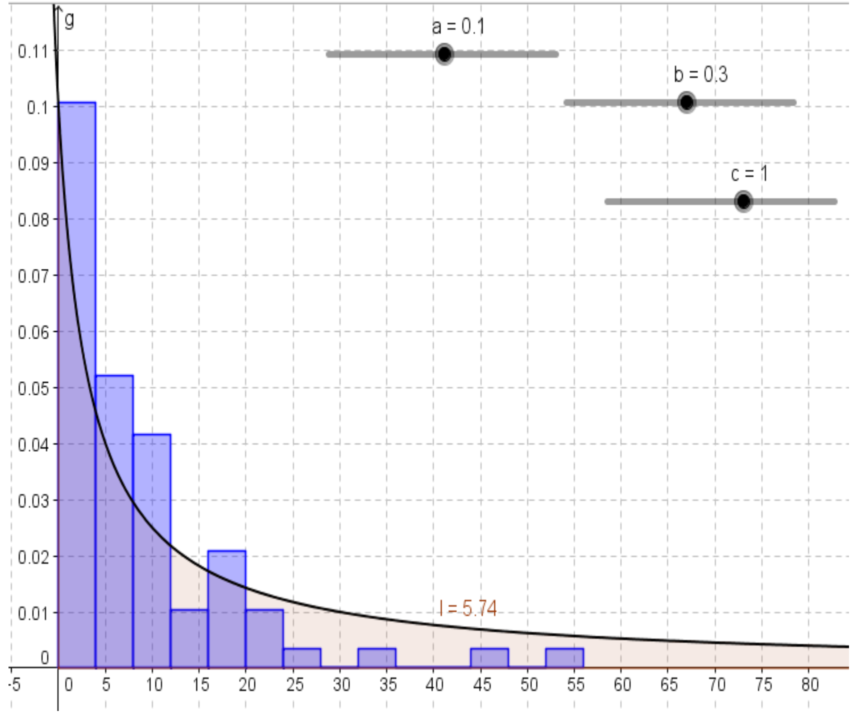

0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80

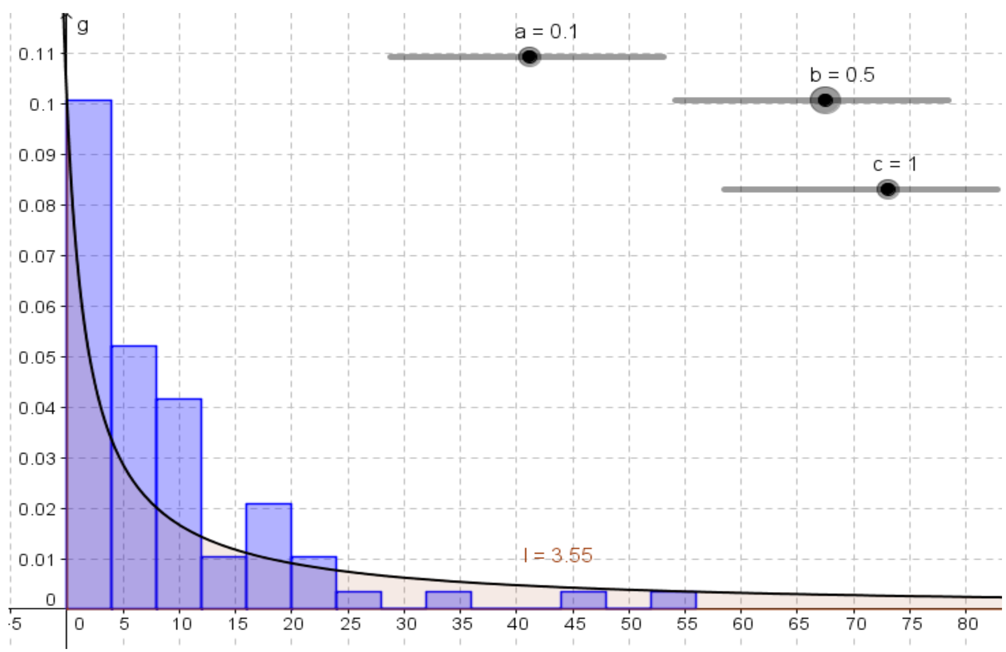

g
a = 1.6
b = 1
c = 1


g
a = 0.5
b = 1
c = 1

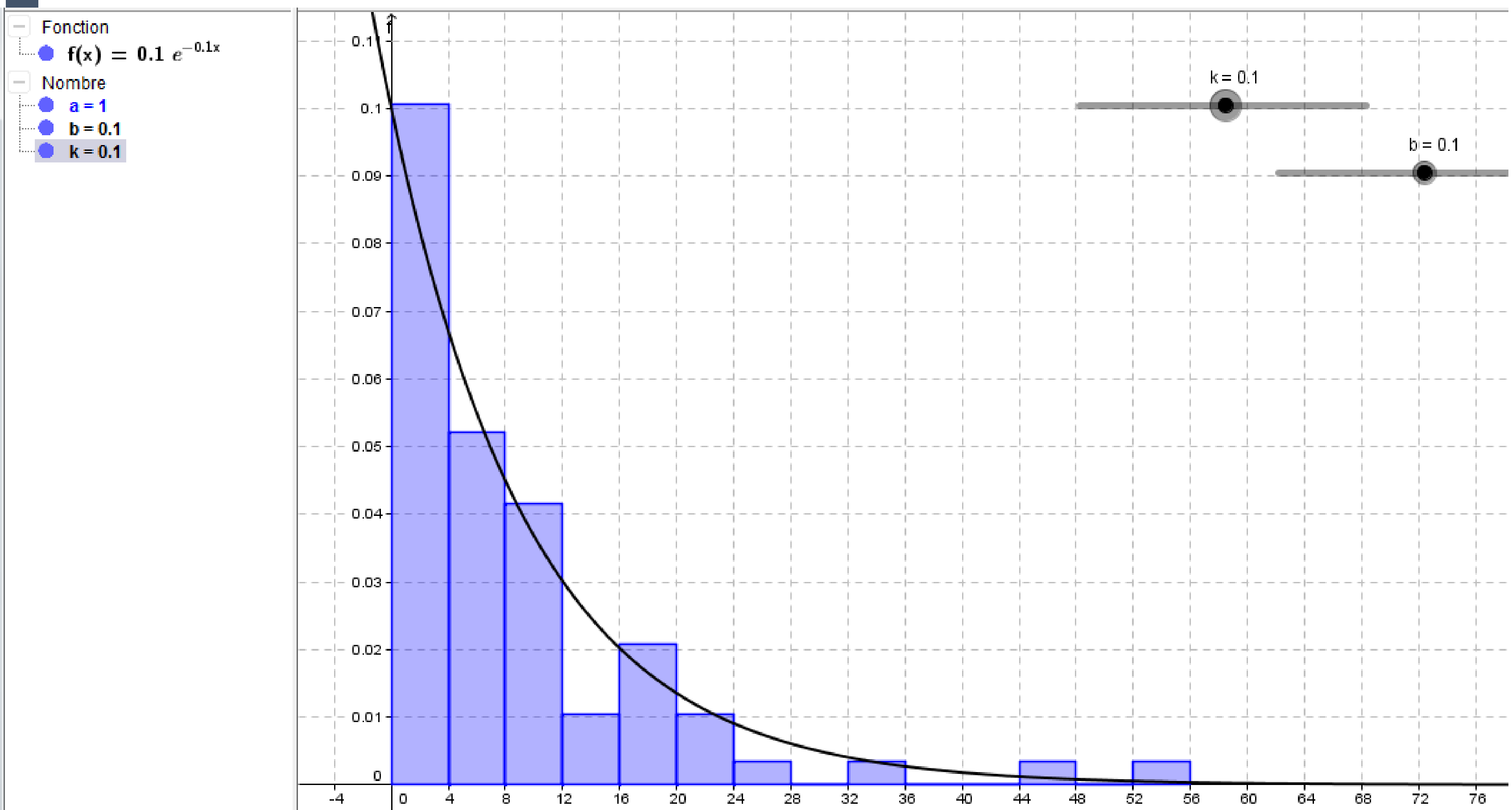

g
a = 0.2
b = 0.3
c = 2


g
a = 0.2
b = 0.7
c = 2


g
a = 0.1
b = 0.3
c = 1
I = 5.74
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80


g
a = 0.1
b = 0.5
c = 1
I = 3.55
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80

Fonction candidate validée



GeoGebra

- GeoGebra_pb2_densite.ggb

- Au final : calcul d'aires sous une courbe non affine

→ Avec GeoGebra

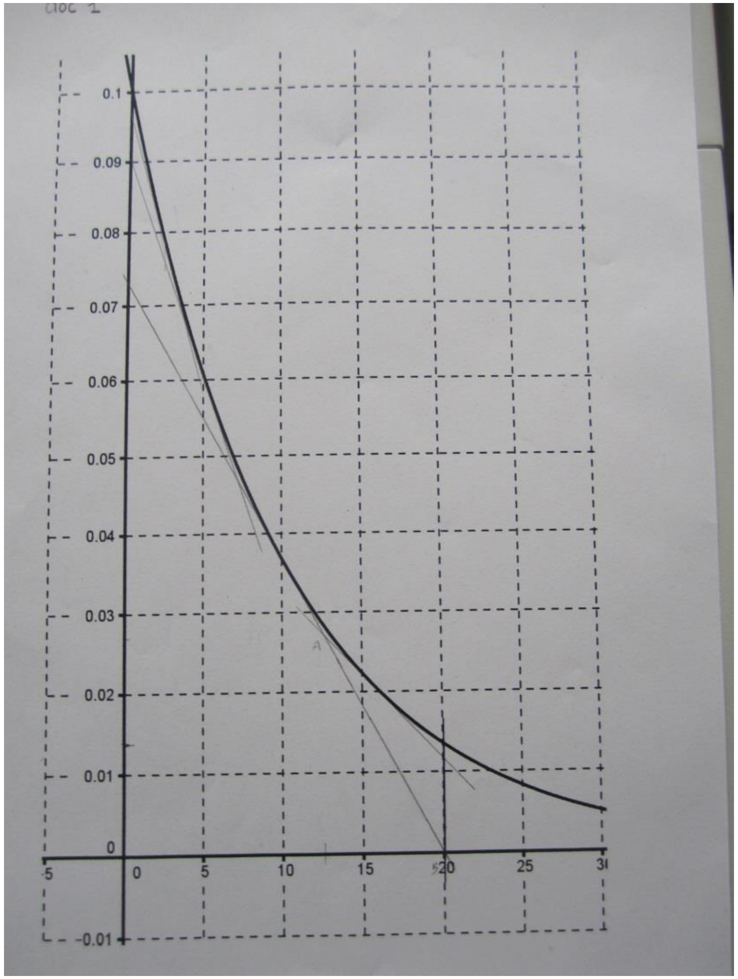
→ Emergence du besoin de calculer des aires sous une courbe

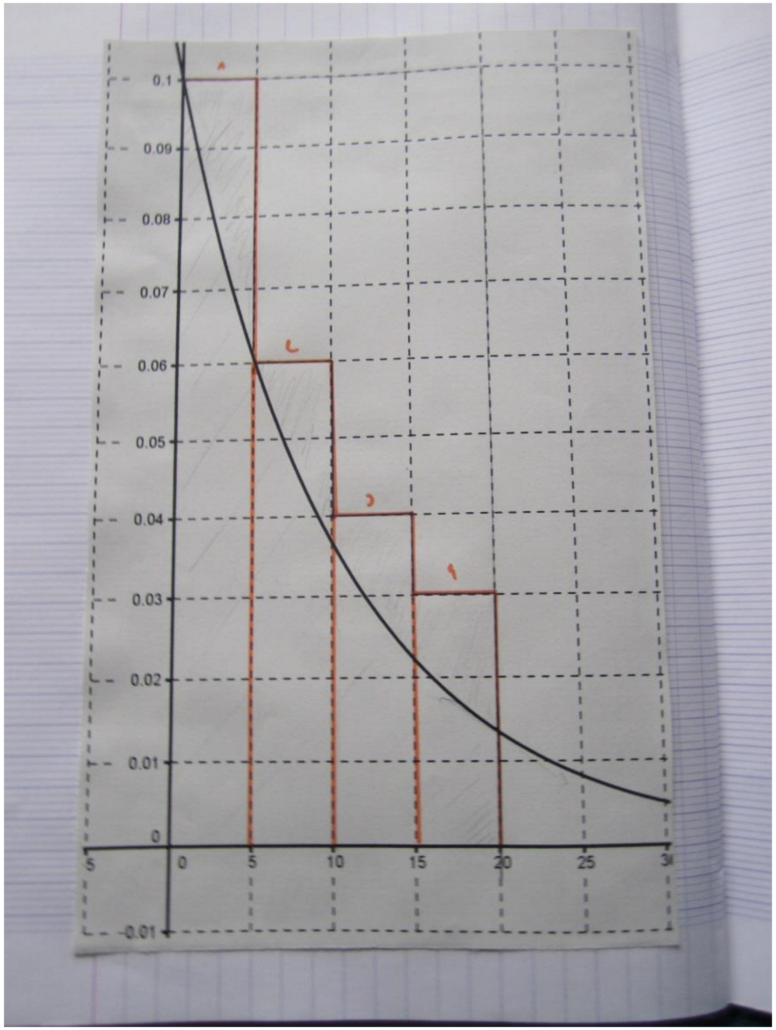
Le calcul d'aire

- Déterminer la probabilité $P(0 \leq X \leq 20)$

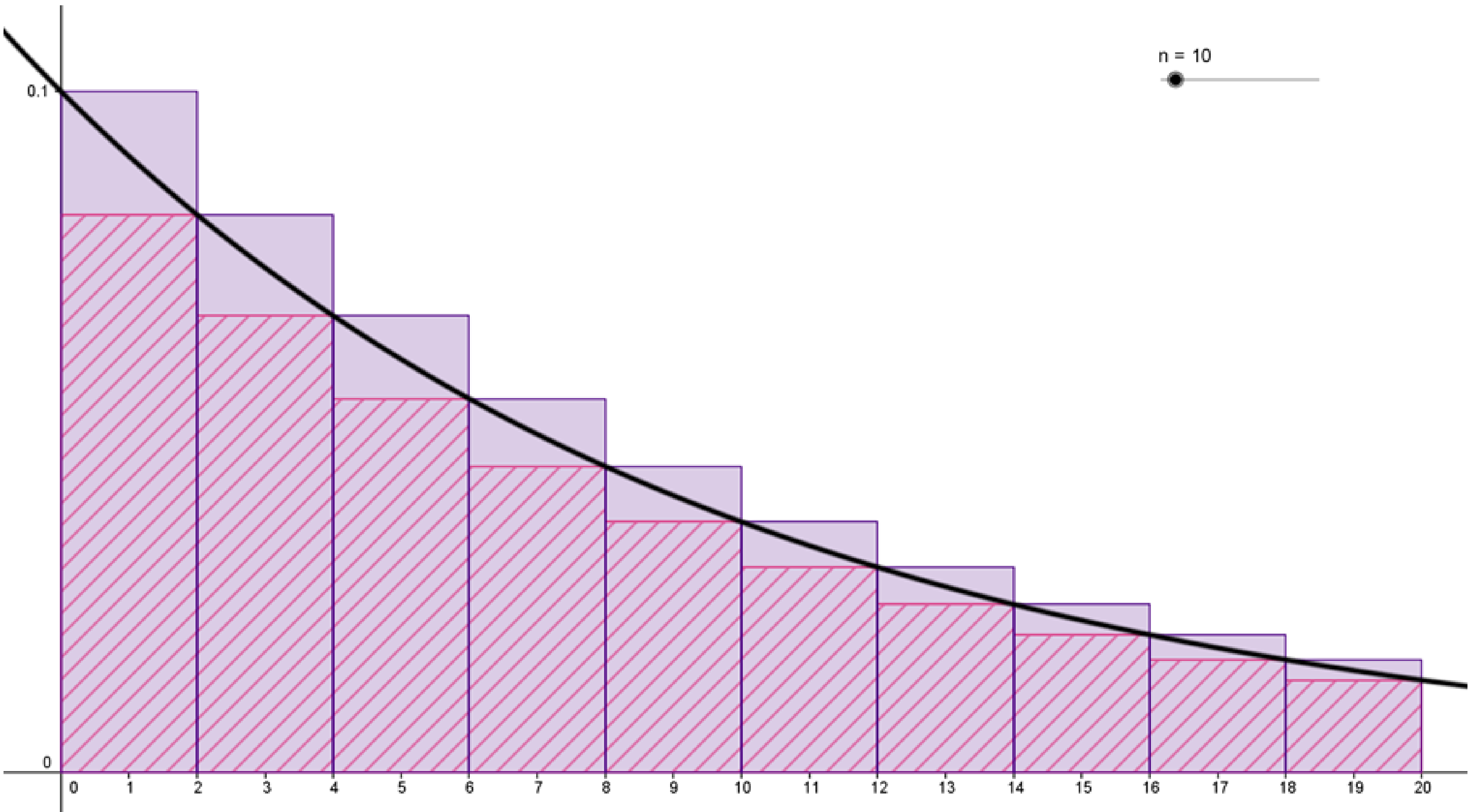
Déroulement :

- Un temps long est laissé aux élèves pour proposer une méthode et obtenir un résultat.
- Méthodes classiquement proposées
  a) Dénombrement des carreaux en dessous
  b) Méthode dite de compensation par les élèves
  c) Méthode des trapèzes
  d) Méthode des rectangles
- La méthode des rectangles est alors institutionnalisée.
  F:\APMEP\Problème2-3\Riemann-carré.ggb


0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-5
0
5
10
15
20
25
A


0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-5
0
5
10
15
20
25

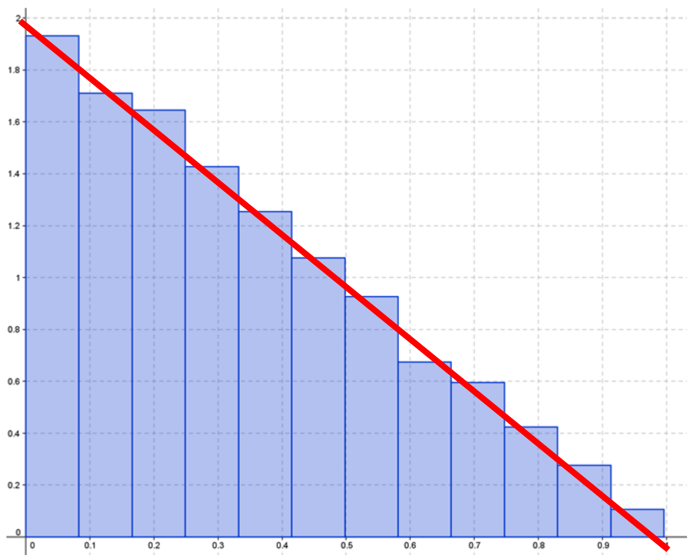
Méthode des rectangles : $f : x \longmapsto 0{,}1 \times e^{-0{,}1x}$

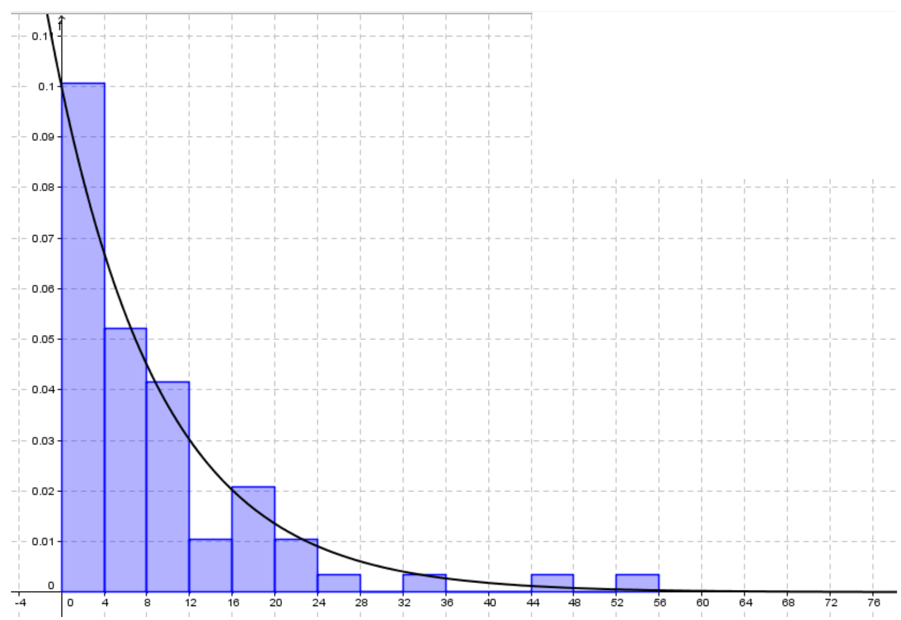


Riemann-volcan.ggb

Bilan sur les deux problèmes

Problème de la rencontre	Problème du volcan Aso
• Emergence de la notion de fonction de densité • Fonction de densité affine → Calcul d'aire de niveau A1 • PaD → SD (simulation) → PaD	• Réinvestissement des propriétés de la fonction de densité • Fonction de densité exponentielle → Calcul d'aire de niveau A3 • SD → PaD (ajustement)





Et la suite de la séquence ?

- Plan du cours
- Fiche exercices

- progression-2015-2016
- progression-2016-2017

Conclusion pour la recherche

- Problèmes d'introduction réalisables en classe de terminale S
  - *Véritable construction du référentiel théorique*
- Inversion de l'ordre d'apparition des notions (lois à densité et calcul intégral)
- Importance de la démarche de modélisation

Limites de la recherche

- Limites de l’expérimentation
- Enseignante avec un profil particulier
- Etablissement (milieu favorisé)

- Suite aux JN APMEP 2016 et 2017, à une formation continue et à un travail collaboratif avec des enseignants de l’IREM de Strasbourg : de nouveaux enseignants expérimentateurs (profils différents d’établissements, d’enseignants…)

Bilan positif des collègues expérimentateurs (des ajustements à faire)

La ressource en ligne

- Projet GIS « Education et formation » (INSPE de Strasbourg)
- Version 1.0

http://espe-formation.unistra.fr/maths/co/00_ressource_maths_terminales.html

Retour sur les nouveaux programmes

- Maths complémentaires : ☺

Intégration

On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On met en relation les écritures $\int_a^b f(x)\ dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a,b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f.
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Lois à densité

Contenus

- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$.
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.

- Loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a,b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Conclusion : quel avenir avec les nouveaux programmes ?

- Cette séquence a un avenir en mathématiques complémentaires en terminale
- La fonction de répartition est maintenant dans le programme : privilégier une introduction de la notion de fonction de répartition avant la notion de fonction de densité ?

Bibliographie

- Un article dans Repères-IREM

Derouet, C., & Alory, S. (2018). Une séquence d’enseignement articulant les lois de probabilité à densité et le calcul intégral en terminale S. *Repères IREM*, *113*, 45–80.

- Un article dans Au fil des maths (Bulletin de l’APMEP)

Derouet, C. (2018). L’histogramme sous une autre facette. *Au Fils Des Maths - Le Bulletin de l’APMEP*, *528*, 33–37.

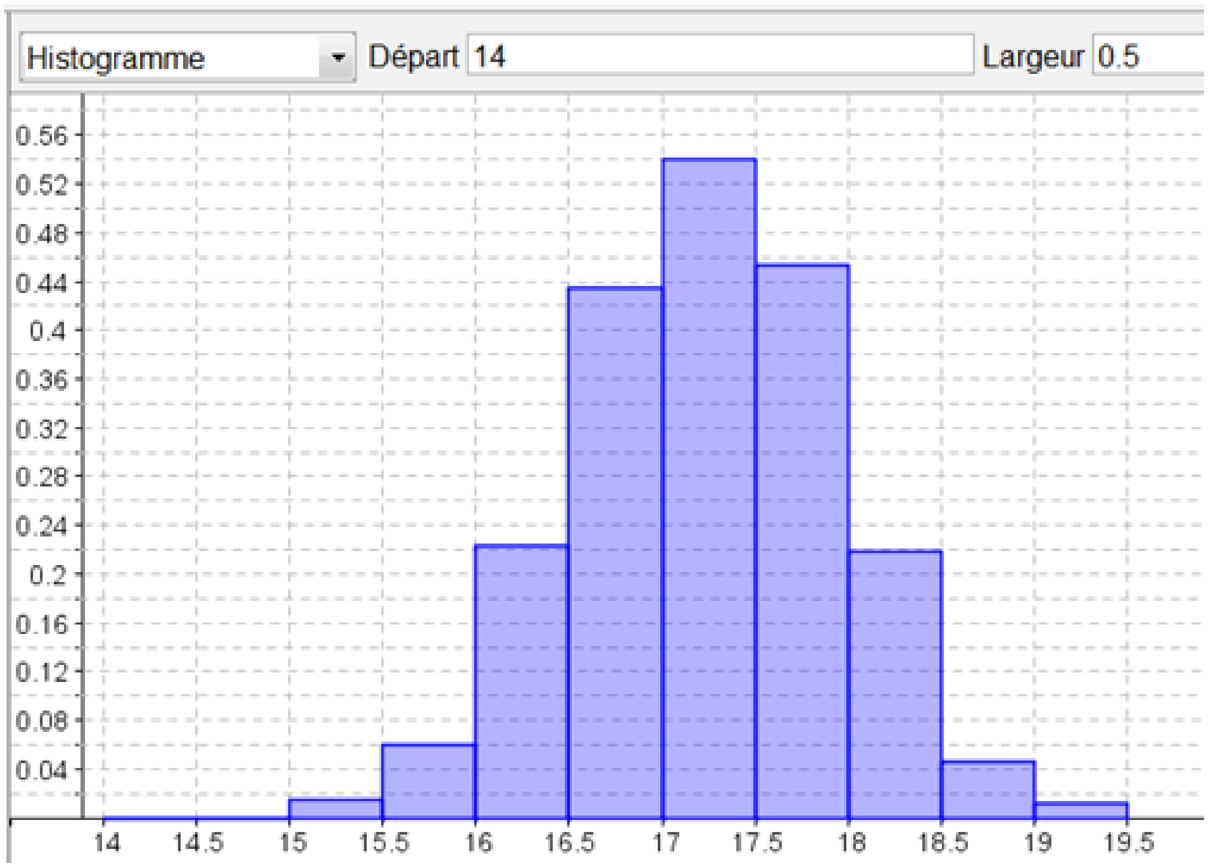
Merci pour votre attention

charlotte.derouet@espe.unistra.fr

Diapo en plus

Dans le cadre de ses recherches sur l'hérédité, le statisticien britannique Karl Pearson (1857-1936), a récolté des données et a établi un fichier des mesures de la taille du père et du fils (adulte) de 1078 familles à la fin du XIXè siècle. Ici, nous ne nous intéresserons qu'aux données sur la taille des pères, en **décimètres**.

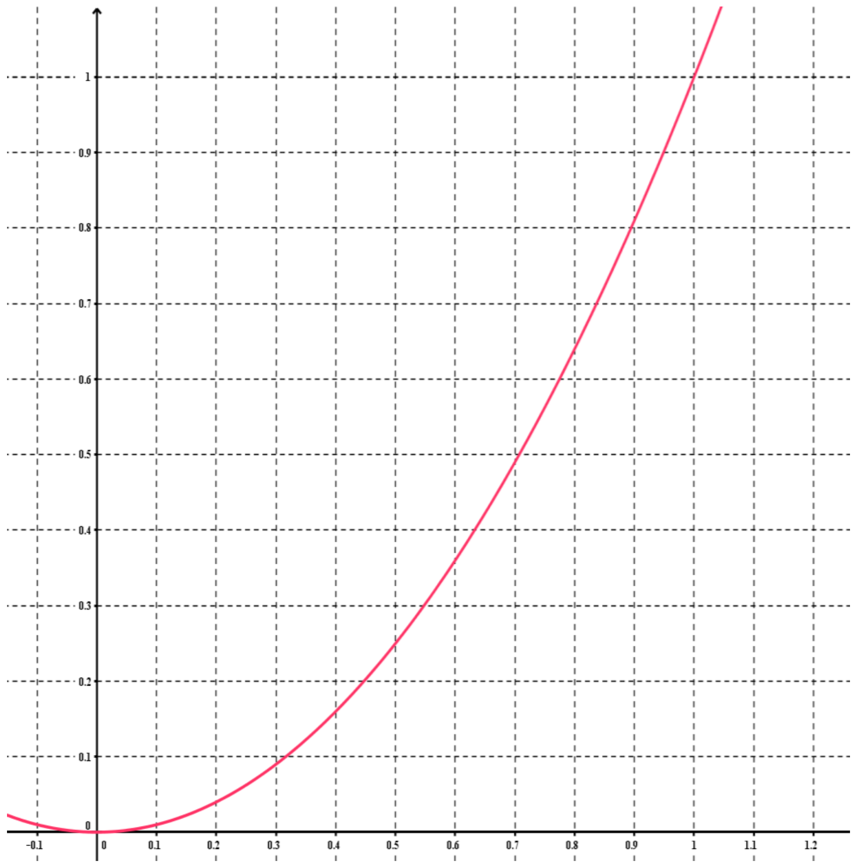
Voici les données représentées sous forme d'histogramme de fréquences.



Le calcul d'aire

- En 2015 : Evaluer la probabilité $P(0 \leq X \leq 20)$

- La classe se range à la proposition de l'enseignant à savoir commencé par calculer l'aire sous une courbe que l'on connaît « bien » : celle de la fonction carré.
- Une courbe de la fonction carré est distribuée aux élèves avec pour consigne « évaluer la mesure de l'aire sous Cf entre 0 et 1 »


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2

Activité 1 Choisir un nombre dans $[0\,;1]$

Un jeu consiste à lancer une fléchette sur des cibles dont la forme est donnée dans chaque cas par le domaine de plan coloré, situé au-dessus du segment représentant l'intervalle $[0\,;1]$, et dont l'aire totale est égale à 1 unité d'aire.
On suppose que la fléchette atteint toujours sa cible, et on appelle x l'abscisse du point d'impact P.
Pour un intervalle J inclus dans $[0\,;1]$, on étudie ci-dessous la probabilité de l'événement $\{x \in J\}$ pour chaque cible.

1 Le lanceur gagne lorsque x appartient à l'intervalle $[0\,;0{,}2]$.

a. Avec quelle cible le lanceur a-t-il apparemment le plus de chance de gagner ?

b. Par lecture graphique, conjecturer la valeur exacte de la probabilité p_2 de gagner avec la cible ❷.

c. Proposer un principe de calcul pour les probabilités p_1 et p_3 de gagner avec les cibles ❶ et ❸.

2 Le bord supérieur du domaine est, pour chaque cible, la courbe d'une fonction dont on donne l'expression :

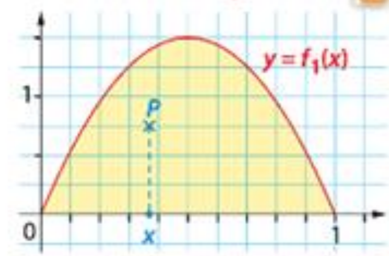
$$f_1 : x \longmapsto 6x(1-x)\,;\quad f_2 : x \longmapsto 1 \quad \text{et} \quad f_3 : x \longmapsto \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}.$$

a. Conjecturer pour quelle cible l'événement $\{0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}7\}$ est le plus probable.

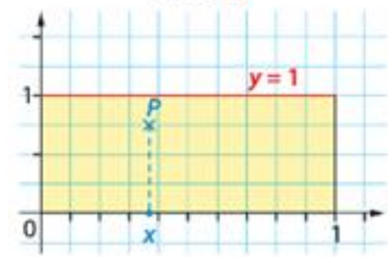
b. En utilisant le calcul intégral, déterminer pour chaque cible la probabilité de l'événement $\{0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}7\}$ et retrouver la conjecture faite au **2 a.**

Pour info Chaque cible permet de modéliser le choix d'un réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ en définissant la probabilité des événements $\{x \in J\}$, pour tout intervalle J inclus dans $[0\,;1]$. La fonction dont la courbe est le bord supérieur de la cible est appelée **densité de la loi de probabilité** ainsi définie sur $[0\,;1]$. On voit dans cette activité que la probabilité d'un même intervalle J varie selon la densité considérée.

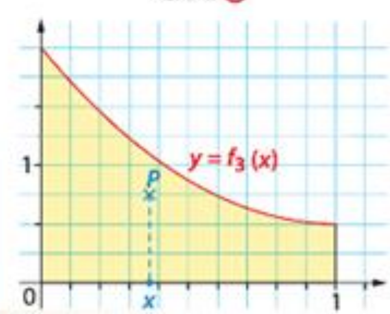
Cible ❶



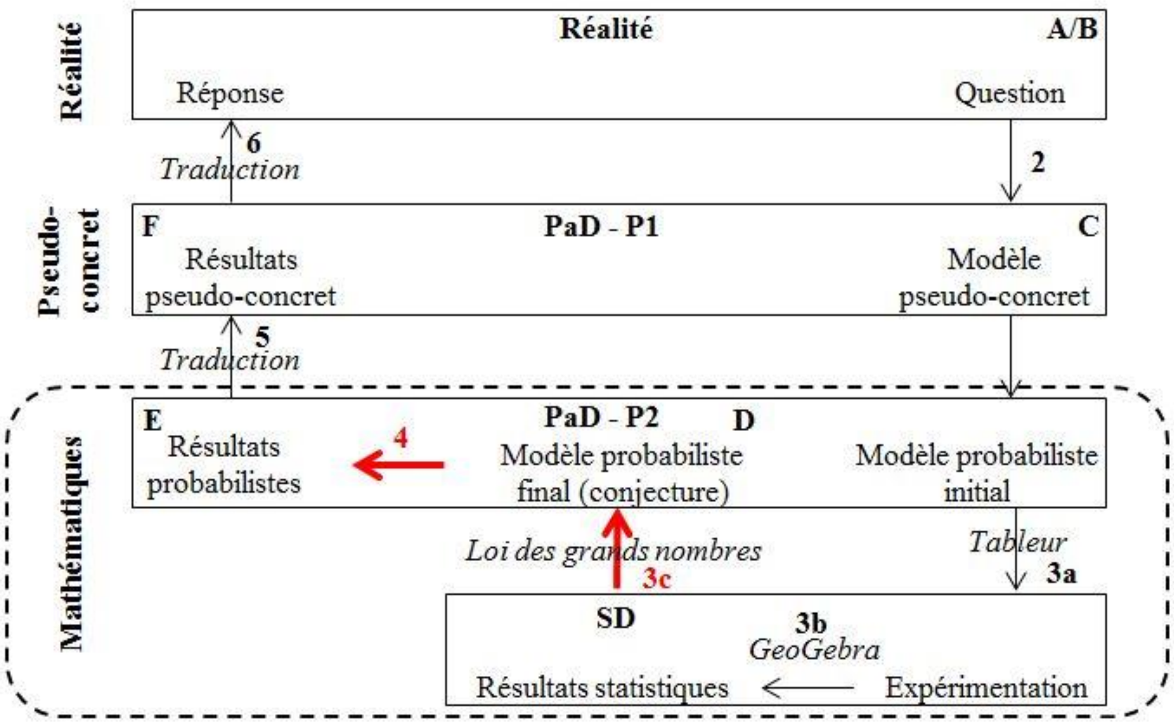
Cible ❷



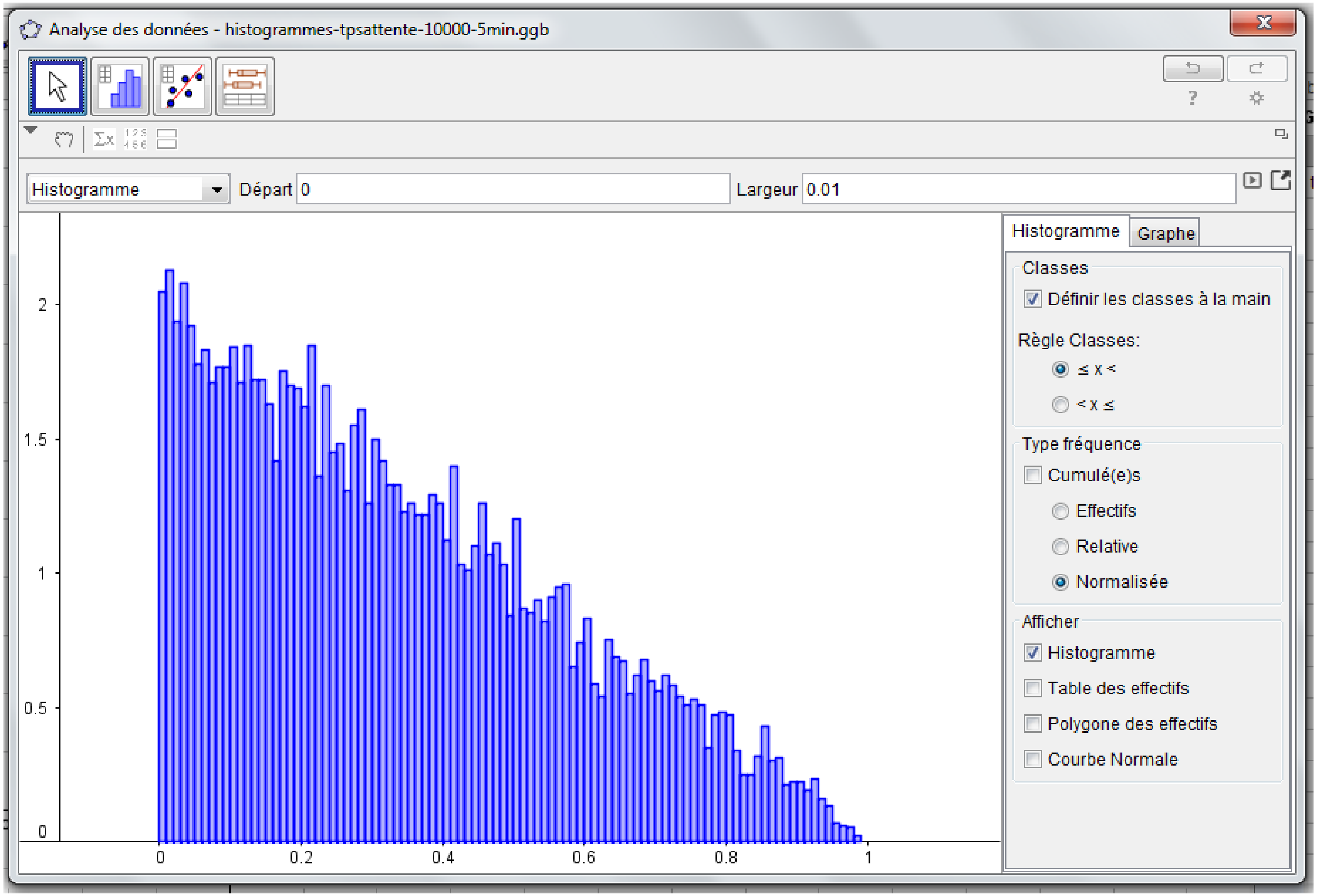
Cible ❸



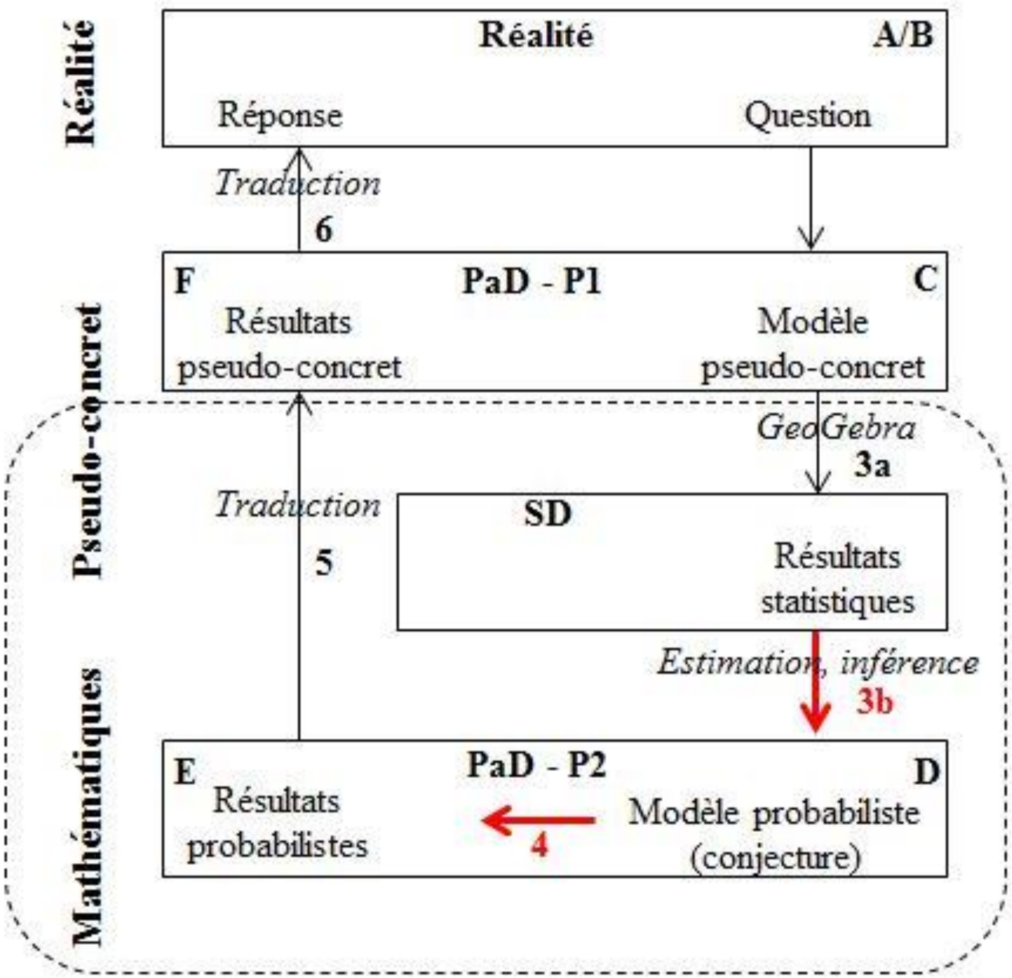
Démarche générale



Histogramme d'amplitude 1 min



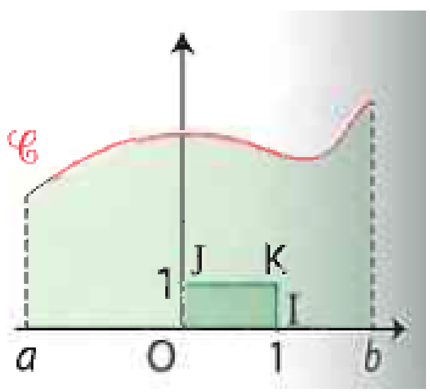
Démarche générale



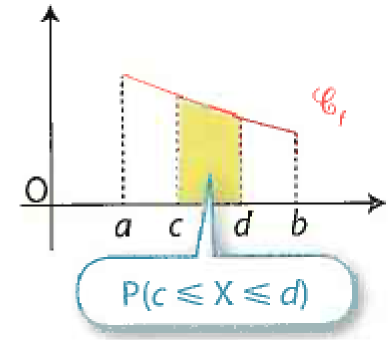
Le programme

Intégration

Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe.



Notion de loi à densité à partir d'exemples



Loi à densité sur un intervalle.

Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x,y)\,;\, x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I.

Le manuel *Hyperbole* (2012)

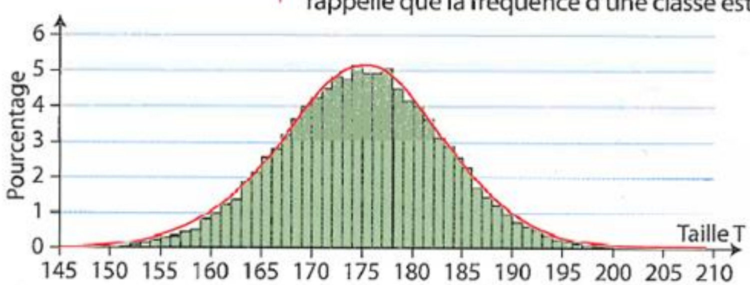
Objectif
Approcher la définition de la loi de probabilité d'une variable continue.

2 La notion de densité d'une loi de probabilité

Un commerçant souhaite vendre un stock de vêtements dont la taille convient à des hommes adultes mesurant entre 1,70 m et 1,77 m.

On se propose de déterminer avec quelle probabilité il pourra satisfaire un client qui entre au hasard dans son magasin.

Pour cela, voici l'histogramme obtenu pour un échantillon de 50 000 hommes adultes. On rappelle que la fréquence d'une classe est donnée par l'aire du rectangle correspondant.



1. Estimer graphiquement la proportion des individus dont la taille est entre 1,70 m et 1,77 m.
2. On a tracé la courbe d'une fonction qui « épouse » l'histogramme et on admet que pour tout échantillon de grand effectif, on obtiendrait un histogramme proche de cette courbe.

Comment calculer à l'aide de cette fonction la probabilité de l'événement $(1{,}70 \leqslant T \leqslant 1{,}77)$? Quelle doit être l'aire sous la courbe de f ? On dit que f est **la densité** de la loi P.

Le manuel *Indice* (2012)

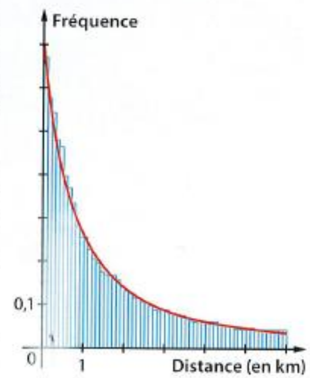
Activité 1 L'éco-point

Objectif
Introduire la notion de loi à densité.

Cours 1
Lois de probabilités à densité

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de 6 kilomètres d'un éco-point. On choisit un habitant au hasard. On note X la distance séparant la résidence de cet habitant de l'éco-point le plus proche. X est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 6[$.

On veut définir la loi de probabilité de X. Pour cela on effectue pour chaque habitant un relevé de la distance à 0,1 kilomètre près dont on déduit l'histogramme des fréquences ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour aire la fréquence de la classe correspondante.



1. a. On sait que 7,7 % des habitants résident à moins de 0,1 km de l'éco-point. En déduire la hauteur du premier rectangle.

b. Que vaut la somme des aires de ces 60 rectangles ?

c. Comment est représentée sur le graphique la probabilité $P(0 \leqslant X < 1)$?

d. Pour tout décimal t appartenant à $\{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \dots ; 5,8 ; 5,9\}$, que représente sur ce graphique la somme des aires des rectangles dont la base est sur $[0 ; t]$?

2. Si on relève les distances à 0,01 kilomètre près, on voit apparaître une courbe comme celle tracée sur le graphique.

Cette courbe représente une fonction f continue sur [0 ; 6], appelée ***densité de probabilité*** *de la loi de X.*

a. Interpréter graphiquement $\int_0^6 f(x)\,dx$. Estimer sa valeur.

b. Soit t un nombre réel appartenant à $[0 ; 6]$. Exprimer $P(0 \leqslant X < t)$ à l'aide d'une intégrale.

Le manuel *Math'x* (2012)

OBJECTIF

Passer d'un histogramme de fréquences à une loi de probabilité continue.

Le fichier GeoGebra est disponible sur le site. Appuyer sur F9 pour d'autres simulations. Augmenter n. Que constate-t-on ?

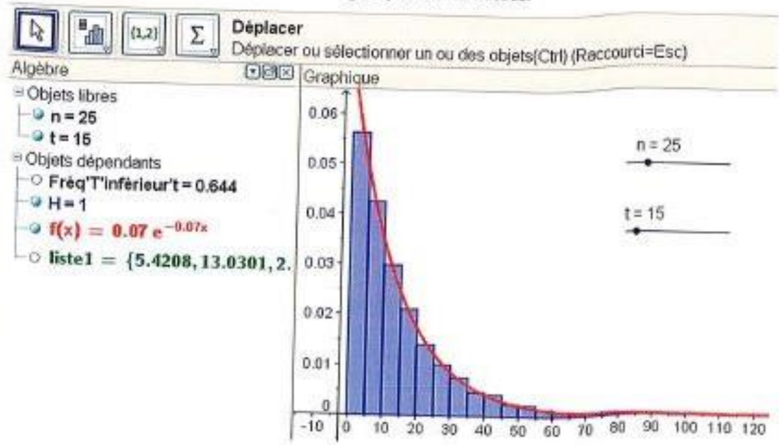
2 Loi exponentielle

TICE

On considère un matériel électronique dont le temps de fonctionnement, exprimé en semestres, est modélisé par une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans $[0\,;+\infty[$.

1. Simulation

On a simulé sur GeoGebra 5 000 temps de fonctionnement de ce matériel.
Pour visualiser les données, on les a regroupées en n classes.



Le diagramme ci-dessus donne l'histogramme associé à un échantillon de taille 5 000, de valeur maximale 125, après regroupement en 25 classes (amplitude 5).

a. Estimer $P(T \leqslant 15)$ et $P(5 \leqslant T \leqslant 15)$.

b. Estimer la valeur t_0 telle que $P(T \leqslant t_0) = 0{,}5$.

2. Courbe de densité et calculs d'aires

On introduit la courbe de densité $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = 0{,}07e^{-0{,}07x}$.

a. Pour tout réel t positif, calculer $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

b. En déduire $F(15)$ et comparer avec l'estimation de $P(T \leqslant 15)$ effectuée à la question A.1.a. Expliquer en donnant une interprétation graphique de $F(15)$.

c. À quelle intégrale peut-on comparer $P(5 \leqslant T \leqslant 15)$? Faire cette comparaison.

d. Résoudre l'équation $F(t) = 0{,}5$ et comparer avec l'estimation de t_0 effectuée à la question 1.b.

e. Calculer la limite de $F(t)$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

Le manuel *Transmath* (2012)

Activité 2 VERS LA DENSITÉ DE PROBABILITÉ D'UNE LOI TICE

On choisit au hasard et de façon indépendante deux nombres x et y dans $[0 ; 1]$.
On note D la variable aléatoire qui indique la différence $x - y$ des deux nombres.

1 **a)** Quel est l'univers U associé à cette expérience aléatoire ?
b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire D ?

2 **Simulation avec un tableur**

On va simuler 10 000 fois cette expérience puis dresser la table des fréquences regroupées en classes d'amplitude 0,1. Pour tout entier k entre 1 et 20, on pose : $I_k = [-1 + 0,1(k-1) ; -1 + 0,1k[$.

a) Ouvrez une feuille de calcul puis complétez.

B3 =NB.SI(A3:A10002;"<-0,9")/10000

	A	B	C	D	E
1	Valeur de D			Intervalles I_k	
2		[-1 ; -0,9[	[-0,9 ; -0,8[	[-0,8 ; -0,7[	[-0,7 ; -0,6[
3	-0,236986814205261	0,0007			

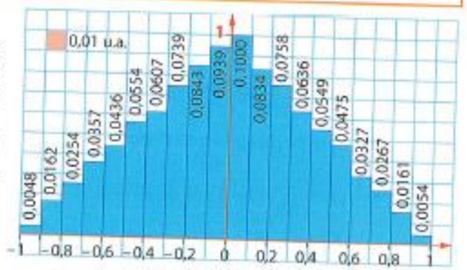
La plage A3:A10002 donne la simulation de 10 000 valeurs prises par D (15 décimales) ;
La plage B3:U3 indique la fréquence (4 décimales) de chaque événement « $D \in I_k$ ».

Aide
Saisissez en B3 : =NB.SI(A3:A10002;"<-0,9")/10000 ; en B4 : =(NB.SI(A3:A10002;">=-0,9")-NB.SI(A3:A10002;">=-0,8"))/10000 ; etc.

b) Affichez l'histogramme des fréquences.

c) Sur l'histogramme ci-contre, l'unité de l'axe des ordonnées est choisie de façon que l'aire de chaque rectangle indique la fréquence de l'événement « $D \in I_k$ » correspondant.
Quelle est la somme des aires des rectangles ?

d) Indiquez la fréquence (à 10^{-3} près) de chacun des événements : « $D < 0$ » ; « $D \geqslant 0,5$ » ; « $-0,2 \leqslant D \leqslant 0,2$ » ; « $0,3 < D < 0,8$ » ; « $-0,75 \leqslant D \leqslant 0,25$ ».



3 **Mise en place d'un modèle**

L'histogramme peut être « ajusté » par la courbe d'une fonction f continue et positive définie sur $[-1 ; 1]$.

a) On admet que f est affine par morceaux. Conjecturez son expression. Calculez l'aire sous sa courbe.

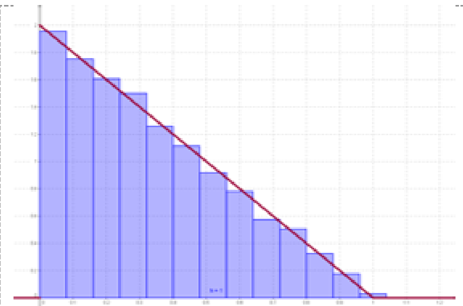
b) $I = [\alpha ; \beta]$ ($\alpha \leqslant \beta$) est un intervalle inclus dans $[-1 ; 1]$. On admet que $P(D \in I) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.
Calculez la probabilité de chacun des événements du **2 d)**.
Les résultats sont-ils en accord avec les fréquences observées lors de la simulation ?

Conclusion. On a mis en évidence une fonction f continue et positive sur $[-1 ; 1]$ dont l'aire sous la courbe est 1 u.a. Cette **fonction**, dite **de densité**, permet le calcul des probabilités suivant la loi de D.

Synthèse donnée en 2017

Nous avons posé T la variable aléatoire égale au temps d'attente, exprimé en heures, du premier arrivé. T prend au moins théoriquement toutes les valeurs de l'intervalle $[0;1]$. T est une variable aléatoire **continue.** Après des remarques d'ordre qualitative, nous avons décidé d'évaluer $p\left(T \leq \frac{1}{6}\right)$ soit la probabilité que le premier arrivé attende moins de 10 min.

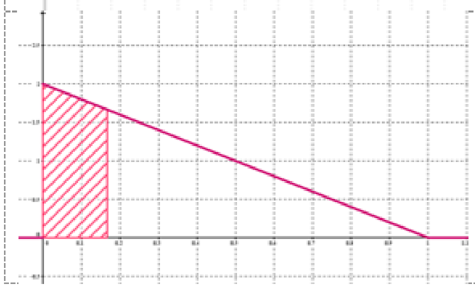
Nous avons alors simulé l'expérience et obtenu des échantillons de taille 10 000. Prenant exemple sur le dm10, nous avons alors construit avec un logiciel les histogrammes de fréquences d'amplitude 5 min. Comme dans le dm 10, nous avons cherché à dessiner une courbe qui approche le mieux le haut des rectangles (appelée courbe de tendance). Nous savions alors qu'on pourrait calculer $p\left(T \leq \frac{1}{6}\right)$ en calculant l'aire sous la courbe de tendance sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{6}\right]$.



La courbe est représentative d'une fonction f affine définie sur $[0;1]$ et décroissante. f vérifie :

- l'aire sous la courbe sur $[0;1]$ est égale à 1 car la somme des fréquences est égale à 1.
- $f(1) = 0$.

Cela a permis de déterminer l'expression de la fonction $f(x) = -2x + 2$.



Pour calculer $p\left(T \leq \frac{1}{6}\right)$, on calcule l'aire sous la courbe de tendance sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{6}\right]$ qui ici correspond à l'aire d'un trapèze.

On trouve $p\left(T \leq \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$.

De la même façon, nous pourrons maintenant calculer la probabilité que la v.a. T prenne ses valeurs dans un intervalle quelconque $[a;b]$ de $[0;1]$. Nous pouvons dire que nous connaissons la v.a. T.