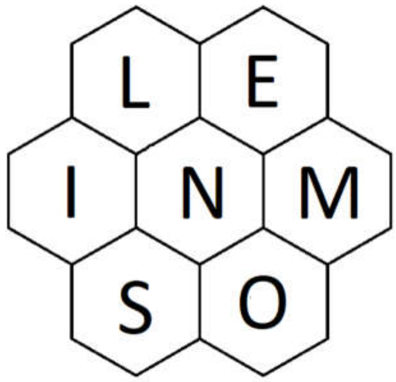
Corrigé Tournoi 2022 lycée

Chemins en "Lemosin" (Limousin en occitan)



La figure ci-contre est constituée de sept hexagones réguliers.

On appelle chemin tout parcours composé d'hexagones accolés qui passe une et une seule fois par chacun d'eux. LEMOSIN est par exemple un chemin ; on considère que NISOMEL est le même chemin parcouru en sens inverse

1. Combien existe-t-il de chemins différents dont les extrémités sont :
L et N ?

Pour aller de L à N on doit d'abord tourner autour de N. Il y a <u>2 chemins</u> : LEMOSIN et LISOMEN.

L et O ?

On ne peut pas commencer par LN car LNO sépare la figure en deux parties disjointes. Si on débute par LE, LEN n'est pas possible donc on doit continuer avec LEM d'où le chemin LEMNISO. Par symétrie il y a aussi le chemin LISNEMO, donc <u>2 chemins</u> au total.

L et M ?

Soit on débute par LI, il faut alors finir par EM : on obtient le chemin LISONEM. Soit on débute par LE, il faut alors finir par OM : on obtient le chemin LENISOM. Au total <u>2 chemins</u>.

L et E ?

La case N peut être placée en position 2 à 6 d'où <u>5 chemins</u> : LNISOME, LINSOME LISNOME, LISONME, LISOMNE.

2. Combien existe-t-il de chemins dont une extrémité est L ?

2 chemins de L à N, 2 chemins de L à O, 2 chemins de L à M et par symétrie 2 chemins de L à S, 5 chemins de L à E et par symétrie 5 chemins de L à I. Au total, 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5 = <u>18 chemins</u> partent de L.

3. Combien existe-t-il de chemins au total ?

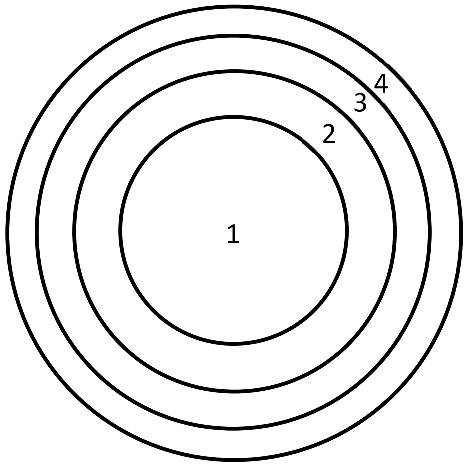
Comptons les chemins qui joignent une case du pourtour à la case centrale : comme il y en a 2 qui partent de la case L et qu'il y a 6 cases possibles pour le départ cela fait 12 chemins au total.

Comptons les chemins qui joignent deux cases du pourtour. D'après la question (2) il y en a 18 – 2 = 16 qui joignent L à une autre case du pourtour. Comme il y a 6 cases pour débuter le chemin cela fait 6*16 = 96 chemins. Mais chaque chemin est compté deux fois puisqu'on peut le parcourir dans un sens ou en sens inverse. Cela fait donc 96 / 2 = 48 chemins qui joignent deux cases du pourtour.

Il y a donc au total 12 + 48 = <u>60 chemins</u>.

Cible (exercice pour les secondes)

On veut construire une cible dont les différentes zones (1, 2, 3, 4, ...) ont toutes <u>la même aire</u> et sont délimitées par des cercles concentriques.
La zone 1 est un disque de rayon 1 et les zones suivantes sont des couronnes délimitées par deux cercles consécutifs.



1. Déterminer le rayon des cercles qui délimitent :
la zone 2,
la zone 3,
la zone 4.

L'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule A = π r², donc le rayon est proportionnel à la racine carrée de l'aire.

Le second cercle délimite un disque dont l'aire est le double de l'aire du premier disque puisque c'est la somme des aires des zones 1 et 2. Son rayon est donc égal à $\sqrt{2}$. De même, le troisième cercle délimite un disque dont l'aire est le triple de l'aire du premier disque, son rayon est donc égal à $\sqrt{3}$. Le quatrième cercle délimite un disque dont l'aire est le quadruple de l'aire du premier disque, son rayon est donc égal à $\sqrt{4} = 2$.

La zone 2 est donc délimitée par deux cercles de rayons 1 et $\sqrt{2}$, la zone 3 est délimitée par deux cercles de rayons $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, la zone 4 est délimitée par deux cercles de rayons $\sqrt{3}$ et 2.

2. Généralisation : déterminer le rayon des cercles qui délimitent la zone n, où n est un entier quelconque supérieur à 1.

De la même façon, le cercle n délimite un disque dont l'aire est égale à $\sqrt{n}$, donc la zone n est délimitée par deux cercles de rayons $\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n}$.

3. On souhaite que la largeur de chaque couronne de la cible soit au moins égale à 0,15. Combien la cible a-t-elle de zones au maximum ?

La zone n ayant pour largeur $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ on doit avoir $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq\ 0{,}15$ qui s'écrit encore $\sqrt{n} \geq \sqrt{n-1} +\ 0{,}15$ En élevant au carré c'est équivalent à $n \geq n - 1 + 0{,}30\sqrt{n-1} +\ 0{,}0225$ ou encore à $0{,}30\sqrt{n-1} \leq 1 -\ 0{,}0225 = 0{,}9775$. En élevant au carré c'est équivalent à $n - 1 \leq \left(\frac{0{,}9775}{0{,}3}\right)^2 \approx 10{,}6$ ... donc $n \leq 11$.

On peut aussi tester avec la calculatrice les valeurs de $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Pour $n = 11$ on obtient 0,154… et pour $n = 12$ on obtient 0,147 donc la cible a au maximum <u>11 zones</u>.

Sommes de nombres impairs (exercice pour les premières et terminales)

On observe :	$1^2 = 1$	$1^3 = 1$
	$2^2 = 1 + 3$	$2^3 = 3 + 5$
	$3^2 = 1 + 3 + 5$	$3^3 = 7 + 9 + 11$
	$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$	$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

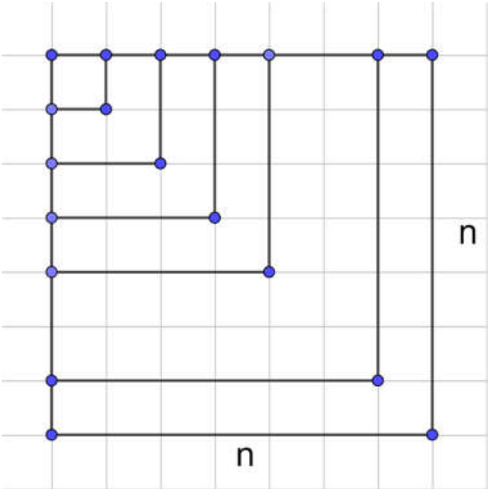
1. Généralisez à n^2 et à n^3 (pour un entier n quelconque supérieur à 1).

La formule générale qui donne la somme des n premiers nombres impairs est :

$$\boxed{n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}$$ (le n-ème nombre impair étant $2n - 1$).

On peut démontrer cette formule par récurrence en utilisant $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

On peut aussi le montrer sans calculs en découpant un carré de côté n en n équerres, l'équerre numéro k étant constituée de $2k - 1$ petits carrés :



La formule générale qui permet d'écrire n^3 comme la somme de n nombres impairs consécutifs est :

$$\boxed{n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + (n^2 - n + 5) + \cdots + (n^2 + n - 1)}$$

On peut démontrer cette formule en remarquant que le second membre est formé des entiers qui s'écrivent $n^2 - n - 1 + 2k$ avec k qui varie de 1 à n, ce qui fait apparaître la somme des entiers pairs.

Quand on ajoute ces n entiers on obtient : $n(n^2 - n - 1) + \frac{2n(n+1)}{2} = n^3$.

Lorsqu'on écrit ces égalités pour tous les entiers n on obtient tous les nombres impairs dans les seconds membres puisque le nombre impair qui suit $n^2 + n - 1$ est $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$, premier terme de l'écriture de $(n + 1)^3$.

2. Pour un entier n quelconque supérieur à 1, écrivez n^4 comme une somme de nombres impairs consécutifs de deux façons :

a) en commençant à 1

b) en utilisant n nombres impairs consécutifs.

a) Il suffit de remplacer n par n^2 dans l'égalité du (1.) pour obtenir :

$$\boxed{n^4 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n^2 - 1)}$$

b) On cherche à écrire $n^4 = (2a+1) + (2a+3) + \cdots + (2b-1)$ avec $b - a = n$ pour qu'il y ait n termes dans la somme. Avec la formule du (1.) on obtient :

$$n^4 = \big(1 + 3 + \cdots + (2b-1)\big) - \big(1 + 3 + 5 + \cdots + (2a-1)\big) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Avec la condition $b - a = n$ on obtient $b + a = n^3$ d'où en résolvant le système :

$a = \frac{n^3-n}{2}$ et $b = \frac{n^3+n}{2}$

On obtient finalement : $\boxed{n^4 = (n^3 - n + 1) + (n^3 - n + 3) + \cdots + (n^3 + n - 1)}$.

On peut généraliser cette formule pour $p \geq 1$ entier en écrivant n^{p+1} comme la somme de n nombres impairs consécutifs :

$$\boxed{n^{p+1} = (n^p - n + 1) + (n^p - n + 3) + \cdots + (n^p + n - 1)}.$$

En effet, les termes de la somme s'écrivent $n^p - n + 2k - 1$, avec k qui varie de 1 à n, et sont donc nombres impairs consécutifs puisque $n^p - n$ est un entier pair. En utilisant la somme des n premiers nombres impairs on obtient que la somme de ces n termes vaut : $n(n^p - n) + n^2 = n^{p+1}$.

Avec des dés

Deborah joue avec 7 dés cubiques ayant chacun une couleur différente.
Chaque dé a 6 faces distinctes portant chacune l'une des lettres I, N, O, R, T, U.
Deborah lance simultanément les 7 dés et observe les faces du dessus.

1. Combien de résultats différents existe-t-il en tenant compte des couleurs ?

Il y a 6 lettres pour chaque couleur donc $6 * 6 * 6 * 6 * 6 * 6 * 6 = 6^7 = 279936$ résultats différents.

Cela revient à former un mot de 7 lettres, chaque lettre étant l'une des 6 lettres I, N, O, R, T, U.

2. Avec quelle probabilité Deborah peut-elle former le mot TOURNOI suite à un lancer des 7 dés ?

Les cas favorables sont ceux pour lesquels chaque lettre apparait exactement une fois sauf la lettre O deux fois. Dans la succession des 7 dés on peut choisir d'abord la place de T, 7 possibilités, puis celle de U, 6 possibilités, puis celle de R, 5 possibilités, puis celle de N, 4 possibilités, puis celle de I, 3 possibilités. Les deux dés restants donnent O. Cela fait $7 * 6 * 5 * 4 * 3 = 2520$ cas favorables. La probabilité demandée est donc : $\frac{2520}{279936} = \frac{35}{3888} \approx 0{,}009$.

3. Parmi les mots TOURIN, TRITON, TIROIR et TONTON, lequel Deborah a-t-elle le plus de chances de former à la suite d'un lancer des 7 dés ? Justifiez-le.

Pour résoudre cette question qui demande d'étudier beaucoup de cas nous allons utiliser la notion de permutation avec répétition. Prenons comme exemple la recherche du nombre de mots de 6 lettres qu'on peut former avec 3 lettres A, 2 lettres B et une lettre C. On peut commencer par placer les trois A en choisissant 3 positions parmi les 6, $\binom{6}{3}$ possibilités, puis on place les deux B en choisissant 2 positions parmi les 3 qui restent, $\binom{3}{2}$ possibilités. Cela fait, $\binom{6}{3}*\binom{3}{2}=\frac{6!}{3!*3!}*\frac{3!}{2!*1!}=\frac{6!}{3!*2!*1!}$ possibilités.

On remarque qu'on a divisé le nombre de permutations de 6 lettres (6 !) par le nombre de permutations des 3 lettres A (3 !) et par le nombre de permutations des 2 lettres B (2 !). Il est inutile d'écrire les 1 ! dans un produit puisqu'ils valent 1.

Pour pouvoir écrire TOURIN il faut obtenir chaque lettre au moins une fois donc une lettre deux fois et chacune des autres une fois. Il y a 6 possibilités pour le choix de la lettre qui est doublée (par exemple T) et ensuite il y a $\frac{7!}{2!}=2520$ mots de 7 lettres formés avec TTOURIN. Donc la probabilité de pouvoir écrire TOURIN est égale à six fois la probabilité calculée au (2.) : $6*\frac{35}{3888}=\frac{35}{648}\approx 0{,}054.$

Pour pouvoir écrire TRITON il y a trois cas à distinguer.

Premier cas, il y a trois fois le T et une fois chaque lettre R, I, O, N. Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TTTRION est égal à $\frac{7!}{3!}=840$.

Deuxième cas, on a deux fois le T, deux fois l'une des lettres R, I, O, N et une fois les trois autres : il y a 4 possibilités pour le choix de la lettre répétée (par exemple le R). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TTRRION étant égal à $\frac{7!}{2!*2!}$ il y a 7 ! = 5040 possibilités pour ce deuxième cas.

Troisième cas, on a deux fois le T, une fois chaque lettre R, I, O, N et une fois la lettre U : c'est la même chose qu'à la question (2.). Cela fait 2520 possibilités pour ce troisième cas. Le nombre total de cas favorables est égal à 840 + 5040 + 2520 = 8400 et la probabilité de pouvoir écrire TRITON vaut $\frac{8400}{279936}=\frac{175}{5832}\approx 0{,}03$.

Pour écrire TIROIR il y a trois cas à distinguer.

Premier cas, on a trois fois le I et deux fois le R (ou l'inverse) et une fois T et O : 2 choix pour celui qui est répété 3 fois (par exemple I). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TIIIRRO est égal à $\frac{7!}{3!*2!}$ donc 7 ! /6 = 840 possibilités pour ce premier cas.

Deuxième cas, on a deux fois le I et le R, deux fois l'une des lettres T et O, une fois l'autre : il y a 2 possibilités pour le choix de la lettre répétée (par exemple le T). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TTIIRRO est égal à $\frac{7!}{2!*2!*2!}$ donc 7 ! /4 = 1260 possibilités pour ce deuxième cas.

Troisième cas, on a deux fois le I et le R, une fois le T, le O, une fois le U ou le N (par exemple le U). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec IIRRTOU est égal à $\frac{7!}{2!*2!}$ donc 7 ! /2 = 2520 possibilités pour ce troisième cas.

Le nombre total de cas favorables est égal à 840 + 1260 + 2520 = 4620 et la probabilité de pouvoir écrire TRITON vaut $\frac{4620}{279936} = \frac{385}{23328} \approx 0{,}0165$.

Pour écrire TONTON il y a deux cas à distinguer.

Premier cas, on a trois fois l'une des lettres T, O, N et deux fois les deux autres. Il y a trois possibilités pour choisir la lettre triplée (par exemple le T). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TTTOONN est égal à $\frac{7!}{3!*2!*2!}$ donc 7 ! /8 = 630 possibilités pour ce premier cas.

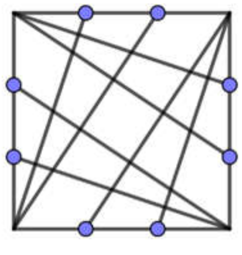
Deuxième cas, on a deux fois les lettres T, O, N et une fois l'une des lettres I, U, R : il y a 3 possibilités pour le choix de la lettre non répétée (par exemple le I). Le nombre de mots de 7 lettres formés avec TTOONNI est égal à $\frac{7!}{2!*2!*2!}$ donc 3 * 7 ! /8 = 1890 possibilités pour ce deuxième cas.

Le nombre total de cas favorables est égal à 630 + 1890 = 2520 et la probabilité de pouvoir écrire TONTON vaut $\frac{2520}{279936} = \frac{35}{3888} \approx 0{,}009$.

Conclusion : entre TOURIN, TRITON, TIROIR et TONTON, celui qui a le plus de chances de pouvoir être formé est TOURIN, puis TRITON, puis TIROIR et enfin TONTON.

Partage d'un carré

1. Sur chaque côté d'un carré on a placé deux points de façon à partager le côté en trois segments égaux.
On joint par un segment chaque sommet du carré à chacun des points placés sur le côté suivant (en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre) comme sur la figure.
En combien de régions a-t-on ainsi partagé le carré ?



En partant d'un sommet (par exemple celui en haut à gauche), le premier segment tracé rencontre les deux segments partant du sommet précédent (pour l'exemple celui en bas à gauche) avant de rencontrer un segment partant du sommet suivant (pour l'exemple celui en haut à droite). Il limite au-dessus de lui 3 régions. Le second segment tracé délimite également 3 régions. Cela fait 6 régions pour chaque sommet plus la région centrale donc au total 4 * 6 + 1 = 25 régions.

2. Même question si on place trois points sur chaque côté du carré.

Avec 3 points sur chaque côté, le premier segment tracé en partant d'un sommet rencontre les trois segments partant du sommet précédent avant de rencontrer un segment partant du sommet suivant, il limite donc 4 régions. C'est la même chose pour les deux autres segments donc cela fait 12 régions pour chaque sommet plus la région centrale donc au total 4 * 12 + 1 = 49 régions.

3. Généralisez à p points sur chaque côté d'un carré, puis à p points sur chaque côté d'un polygone régulier à n côtés (n et p entiers quelconques, n supérieur ou égal à 4, p supérieur ou égal à 1).

Avec p points sur chaque côté d'un carré, le premier segment tracé en partant d'un sommet rencontre les p segments partant du sommet précédent avant de rencontrer un segment partant du sommet suivant, il limite donc p+1 régions. C'est la même chose pour les p-1 autres segments donc cela fait p(p+1) régions pour chaque sommet plus la région centrale donc au total $4p(p+1) + 1 = (2p+1)^2$ régions.

Si on passe à un polygone régulier à n côtés avec p points sur chaque côté, le premier segment tracé en partant d'un sommet rencontre les p segments partant du sommet précédent avant de rencontrer un segment partant du sommet suivant, il limite donc p+1 régions. C'est la même chose pour les p-1 autres segments donc cela fait p(p+1) régions pour chaque sommet plus la région centrale donc au total $np(p+1) + 1 = np^2+np+1$ régions.

4. Trouvez n et p quand on obtient un nombre de régions égal à 2021.

Il faut résoudre l'équation np(p+1)=2020 : 2020 se factorise en 2020 = 4 * 5 * 101.

Le produit p(p+1) doit diviser 2020. Il y a deux solutions :

p = 1 d'où n = 1010 : polygone à 1010 côtés et 1 point sur chaque côté.

p = 4 d'où n = 101 : polygone à 101 côtés et 4 points sur chaque côté.