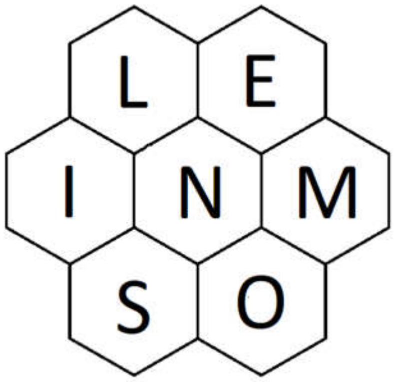
Corrigé Tournoi 2022 collège

Chemins en "Lemosin" (Limousin en occitan)



La figure ci-contre est constituée de sept hexagones réguliers.

On appelle chemin tout parcours composé d'hexagones accolés qui passe une et une seule fois par chacun d'eux. LEMOSIN est par exemple un chemin ; on considère que NISOMEL est le même chemin parcouru en sens inverse

1. Combien existe-t-il de chemins différents dont les extrémités sont :

L et N ?

Pour aller de L à N on doit d'abord tourner autour de N. Il y a <u>2 chemins</u> : LEMOSIN et LISOMEN

L et O ?

On ne peut pas commencer par LN car LNO sépare la figure en deux parties disjointes. Si on débute par LE, LEN n'est pas possible donc on doit continuer avec LEM d'où le chemin LEMNISO. Par symétrie il y a aussi le chemin LISNEMO, donc <u>2 chemins</u> au total.

L et M ?

Soit on débute par LI, il faut alors finir par EM : on obtient le chemin LISONEM. Soit on débute par LE, il faut alors finir par OM : on obtient le chemin LENISOM. Au total <u>2 chemins</u>.

L et E ?

La case N peut être placée en position 2 à 6 d'où <u>5 chemins</u> : LNISOME, LINSOME LISNOME, LISONME, LISOMNE.

2. Combien existe-t-il de chemins dont une extrémité est L ?

2 chemins de L à N, 2 chemins de L à O, 2 chemins de L à M et par symétrie 2 chemins de L à S, 5 chemins de L à E et par symétrie 5 chemins de L à I. Au total, 2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5 = <u>18 chemins</u> partent de L.

3. Combien existe-t-il de chemins au total ?

Comptons les chemins qui joignent une case du pourtour à la case centrale : comme il y en a 2 qui partent de la case L et qu'il y a 6 cases possibles pour le départ cela fait 12 chemins au total.

Comptons les chemins qui joignent deux cases du pourtour. D'après la question (2) il y en a 18 – 2 = 16 qui joignent L à une autre case du pourtour. Comme il y a 6 cases pour débuter le chemin cela fait 6*16 = 96 chemins. Mais chaque chemin est compté deux fois puisqu'on peut le parcourir dans un sens ou en sens inverse. Cela fait donc 96 / 2 = 48 chemins qui joignent deux cases du pourtour.

Il y a donc au total 12 + 48 = <u>60 chemins</u>.

Carrés à deux chiffres

1. Quels sont tous les entiers ab (à deux chiffres non nuls a et b) qui sont le carré d'un nombre entier, comme 16 = 4² ?

Ce sont les carrés des entiers 4, 5, 6, 7, 8 et 9 : <u>16, 25, 36, 49, 64 et 81</u>.

2. Quels sont tous les entiers abc (à trois chiffres non nuls a, b et c) tels que ab et bc sont chacun le carré d'un nombre entier ?

ab = 16 est possible avec bc = 64.
ab= 25 n'est pas possible (aucun carré à deux chiffres ne débute par 5).
ab = 36 est possible avec bc = 64.
ab = 49 n'est pas possible (aucun carré à deux chiffres ne débute par 9).
ab = 64 est possible avec bc = 49.
ab = 81 est possible avec bc = 16.

Il y a donc quatre entiers abc qui conviennent : <u>164, 364, 649 et 816</u>.

3. Quels sont tous les entiers abcd (à quatre chiffres non nuls a, b, c et d) tels que ab, bc et cd sont chacun le carré d'un nombre entier ?

Pour abc il faut choisir l'un des entiers précédents :
abc = 164 et abc = 364 conviennent avec d = 9.
abc = 649 ne convient pas (aucun carré à deux chiffres ne débute par 9).
abc = 816 convient avec d = 4.

Il y a donc trois entiers abcd qui conviennent : <u>1649, 3649 et 8164</u>.

4. Quels sont tous les entiers abcde (à cinq chiffres non nuls a, b, c, d et e) tels que ab, bc, cd et de sont chacun le carré d'un nombre entier ?

Pour abcd il faut choisir l'un des entiers précédents :
abcd = 1649 et abcd = 3649 ne conviennent pas (aucun carré à deux chiffres ne débute par 9).
abcd = 8164 convient avec d = 9.

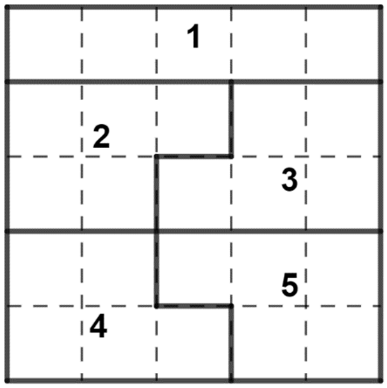
Un seul entier abcde convient : <u>81649</u>.

5. Existe-t-il un entier abcdef (à six chiffres non nuls a, b, c, d, e et f) tel que ab, bc, cd, de et ef sont chacun le carré d'un nombre entier ? Justifiez-le.

Pour abcde on doit choisir l'entier précédent mais on ne peut pas le compléter par f puisqu'aucun carré à deux chiffres ne débute par 9 : abcdef n'existe pas.

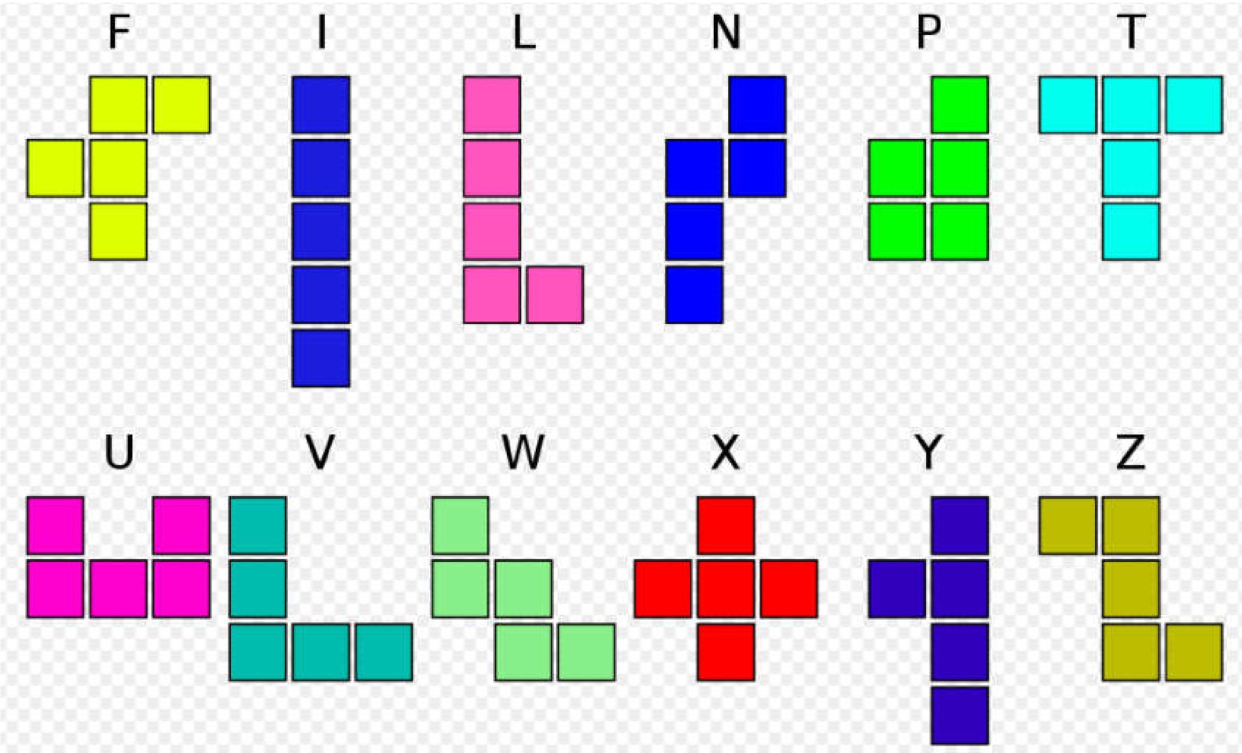
Carrés de cinq pentaminos

Pour fabriquer un pentamino on assemble cinq petits carrés identiques. En choisissant bien cinq pentaminos on peut les assembler pour former un grand carré. Voici par exemple un carré obtenu avec cinq pentaminos.



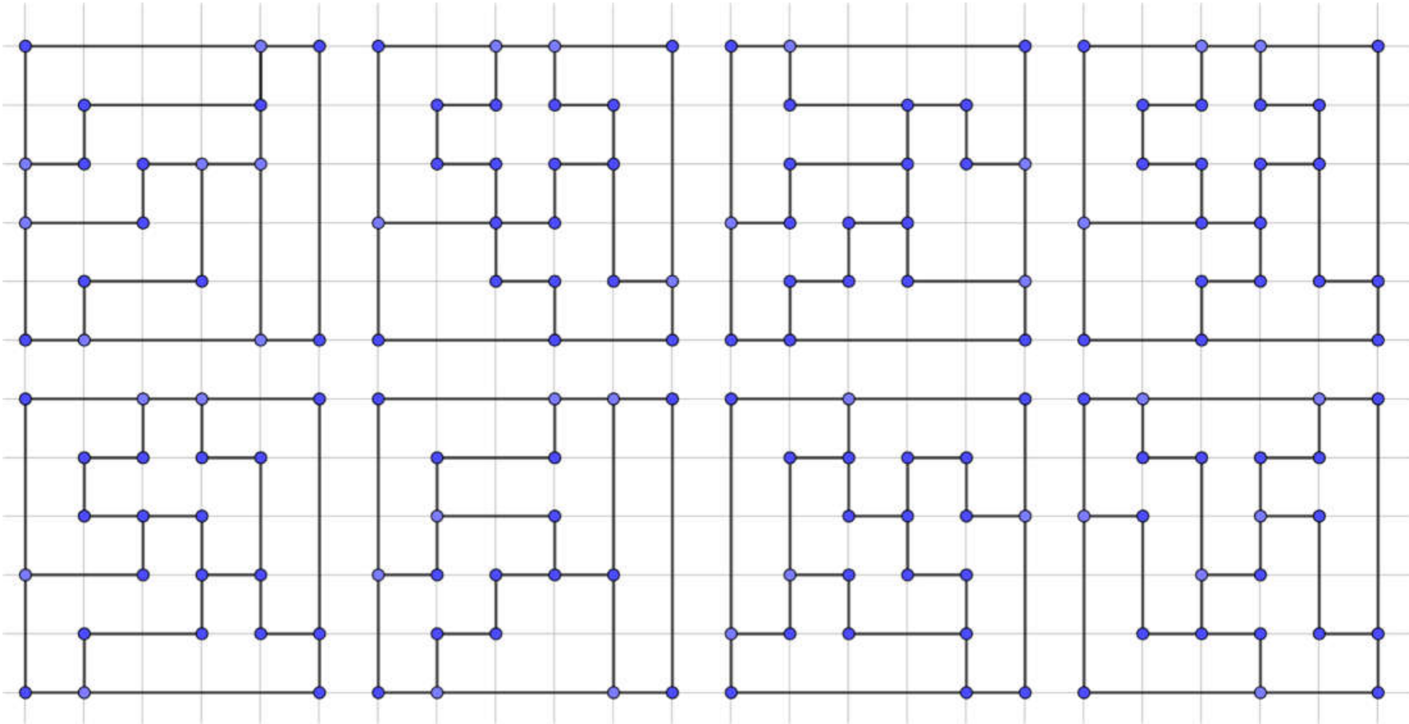
*1. Les pentaminos **2** et **3** se déduisent l'un de l'autre en les faisant tourner et sont considérés comme identiques, de même que les pentaminos **2** et **4** qui se déduisent l'un de l'autre par une symétrie. Dessinez les différents pentaminos que l'on peut former avec cinq carrés (il y en a 12 au total).*

Voici les 12 pentaminos différents qu'on peut former :



2. Dessinez deux carrés constitués chacun de cinq pentaminos différents (ne se déduisant pas l'un de l'autre par une symétrie ou en les faisant tourner).

Il y a un très grand nombre de possibilités pour dessiner de tels carrés, par exemple :



Importance des dates

Aujourd'hui mardi 18 janvier, jour du Tournoi Mathématique du Limousin, les jumeaux Léa et Tom concourent ensemble et se lancent des défis dans le bus.

1. Tom a calculé que l'anniversaire de leur mère sera dans 123 jours, et Léa que celui de leur père sera dans 234 jours. Quels sont les jours des anniversaires des parents de Tom et Léa ?

Le jour de l'anniversaire de leur mère est le 18 + 123 = $141^{\text{ème}}$ jour de l'année. Jusqu'au 30 avril il y a 31 + 28 + 31 + 30 = 120 jours, donc l'anniversaire de leur mère est le 141 – 120 = 21 mai.

Le jour de l'anniversaire de leur père est le 18 + 234 = $252^{\text{ème}}$ jour de l'année. Jusqu'au 31 août il y a 120 + 31 + 30 +31 +31 = 243 jours, donc l'anniversaire de leur père est le 252 – 243 = 9 septembre.

2. Léa a remarqué que si on permute les chiffres de l'âge qu'a eu leur mère en 2021, on obtient l'âge qu'elle a eu en 2012 (année obtenue en permutant les deux derniers chiffres de 2021) et c'est vrai aussi pour toutes les années de 2020 à 2027 mais pas pour 2028. En quelle année la mère de Léa et Tom est-elle née ?

Notons ab l'âge de leur mère en 2021, son âge en 2012 est donc ba. De 2012 à 2021 son âge a augmenté de 9 ans, donc ab-ba=9 d'où 10a + b – (10b + a) = 9 qui donne 9(a-b) = 9 donc a = b+1.

Les âges raisonnablement possibles sont 32, 43 et 54 ans, le plus probable étant 43 ans.
Vérifions que ab = 43 convient, c'est-à-dire que la mère de Léa et Tom serait née en 2021 – 43 = 1978.
Elle aurait 42 ans en 2020 et 24 ans en 2002. Pas de problème pour 2022. Elle aurait 45 ans en 2023 et 54 ans en 2032, 46 ans en 2024 et 64 ans en 2042, 47 ans en 2025 et 74 ans en 2052, 48 ans en 2026 et 84 ans en 2062, 49 ans en 2027 et 94 ans en 2072. Mais ensuite elle aurait 50 ans en 2028 mais pas 5 ans en 2082 !
Donc les années convenables sont bien les années de 2020 à 2027.

Si on essaie l'âge de 32 ans cela va encore en 2028 puisqu'elle aurait 39 ans en 2028 et 93 ans en 2082 ; elle n'a donc pas 32 ans.

Si on essaie l'âge de 54 ans cela ne va plus en 2027 puisqu'elle aurait 60 ans en 2027 mais pas 6 ans en 2072. La mère de Léa et Tom est donc née en 1978.

3. Tom a remarqué que si on faisait pareil avec leur père, ce n'était vrai que de 2020 à 2026 pour cette décennie. En quelle année le père de Léa et Tom est-il né ?

Pour le père on n'a pas à recommencer les calculs puisqu'on a montré que pour un âge de 54 ans en 2021 les années convenables sont les années de 2020 à 2026. Le père de Léa et Tom est né en 2021 – 54 = 1967.