Tournoi 2024 corrigé collège

2024 et les autres

Dans 2024, l'un des chiffres est égal à la somme des trois autres : 4 = 2 + 0 + 2.

On aurait la même propriété dans 1751 : 7 = 1 + 5 + 1.

1) Quelles sont les deux prochaines années qui auront cette propriété ?

Les deux prochaines années sont 2031 et 2035.

2) Quelles sont les deux précédentes années qui avaient cette propriété ?

Les deux précédentes années sont 2020 et 2013.

3) Quelles sont les années du 20e siècle qui ont cette propriété ?

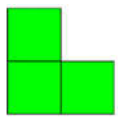
Il y a 9 années du 20e siècle qui ont cette propriété : 1908, 1917, 1926, 1935, 1944, 1953, 1962, 1971 et 1980.

4) Combien d'années du 21e siècle ont cette propriété ?

Il y a 17 années du 21e siècle qui ont cette propriété : 2002, 2011, 2013, 2020, 2024, 2031, 2035, 2042, 2046, 2053, 2057, 2064, 2068, 2075, 2079, 2086 et 2097.

Escaliers bien pavés

On veut paver entièrement un escalier régulier par des triminos coudés.

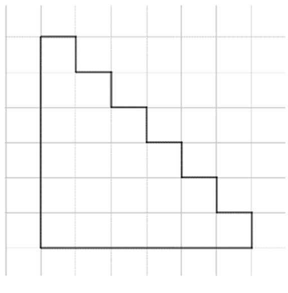


On a le droit de tourner le trimino (il y a donc quatre orientations possibles).

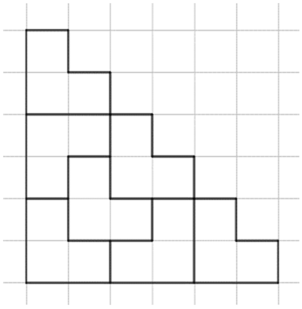
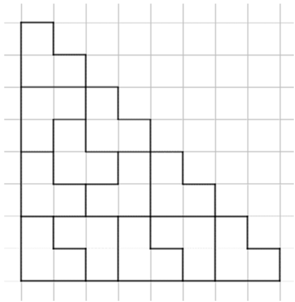
C'est possible pour un escalier de hauteur égale à 2 avec un seul trimino.

On peut montrer que ce n'est pas possible pour les hauteurs 3, 4 et 5.

1) Pavez un escalier de hauteur 6 (voir la figure) avec des triminos coudés.
En déduire un pavage avec des triminos coudés pour un escalier de hauteur 8.



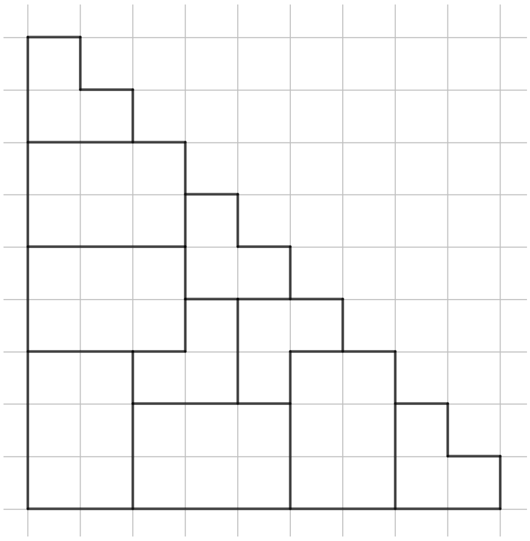
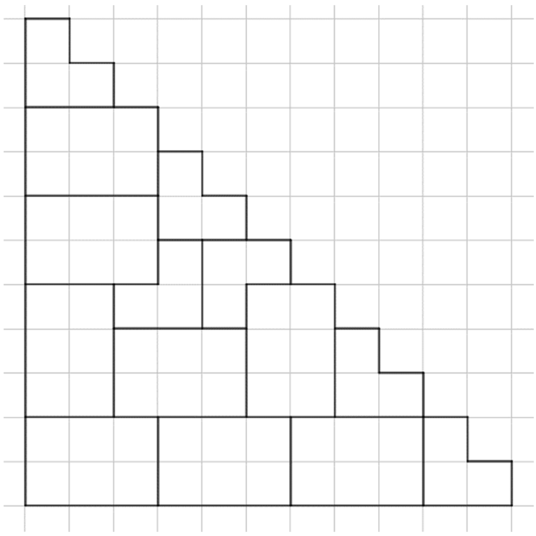
Il n'y a qu'une façon de paver un escalier de hauteur 6. On en déduit le pavage d'un escalier de hauteur 8 en ajoutant au-dessous deux rectangles 2 x 3 partagés en deux triminos et en complétant par un trimino.

2) Pavez un escalier de hauteur 9 avec des triminos coudés.
En déduire un pavage avec des triminos coudés pour un escalier de hauteur 11.

Il y a plusieurs possibilités pour paver un escalier de hauteur 9.

A partir du pavage d'un escalier de hauteur 9 il suffit d'ajouter à la base trois rectangles 2x3 et un trimino pour obtenir le pavage d'un escalier de hauteur 11.

3) Est-il possible de paver les escaliers de hauteur 7 et 10 par des triminos coudés ?

Un escalier de hauteur 7 possède au total 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 petits carrés. Comme 28 n'est pas un multiple de 3 on ne peut pas le paver par des triminos.

Un escalier de hauteur 10 possède au total 28 + 8 + 9 + 10 = 55 petits carrés. Comme 55 n'est pas un multiple de 3 on ne peut pas le paver par des triminos.

Partages équitables

On peut partager {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} en trois parties de même somme : {1, 2, 3, 6}, {4,8} et {5,7}.

1) Partagez {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} en trois parties de même somme.

Avec 1+15 = 2+14 = 3+13 = 4+12 = 5+11 = 6+10 = 7+9 = 16 on obtient que la somme de tous entiers de 1 à 15 est égale à 7*16 + 8 = 120 donc la somme commune aux trois parties est égale à 120 / 3 = 40.

Il y a beaucoup de solutions, par exemple les trois parties :

{15, 14, 11}, {13, 12, 10, 5} et {9, 8, 7, 6, 4, 3, 2, 1}.

2) Partagez {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} en quatre parties de même somme.

Pour quatre parties la somme commune est égale à 120 / 4 = <u>30</u>.

Il y a beaucoup de solutions, par exemple les quatre parties :

{15, 14, 1}, {13, 12, 5}, {11, 10, 9} et {8, 7, 6, 4, 3, 2}.

3) Pour quels nombres de parties peut-on partager {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} en parties de même somme ?

On sait déjà que c'est possible pour trois et quatre parties d'après les questions 1) et 2). C'est évidemment possible pour une seule partie qui contient tous les entiers de 1 à 15.

La somme commune aux parties s'obtient en divisant 120 par le nombre de parties.

C'est possible pour deux parties de somme 60, par exemple {15, 14, 1, 13, 2, 12, 3} et {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}.

C'est possible pour cinq parties de somme 24, par exemple {15, 9}, {14, 10}, {13, 11}, {12, 8, 4} et {7, 6, 5, 3, 2, 1}.

C'est possible pour six parties de somme 20, par exemple {15, 5}, {14, 6}, {13, 7}, {12, 8}, {11, 9} et {10, 4, 3, 2, 1}.

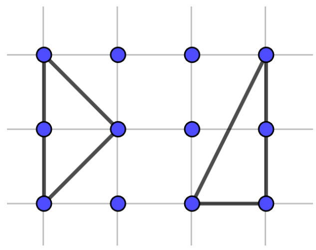
Ce n'est pas possible pour 7 parties car 120 n'est pas divisible par 7.

C'est possible pour huit parties de somme 15, par exemple {15}, {14, 1}, {13, 2}, {12, 3}, {11, 4}, {10, 5}, {9,6} et {8, 7}.

Ce n'est pas possible pour plus de huit parties car la somme commune doit au moins être égale à 15.

Il y a donc <u>sept nombres de parties possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8</u>.

Triangles rectangles

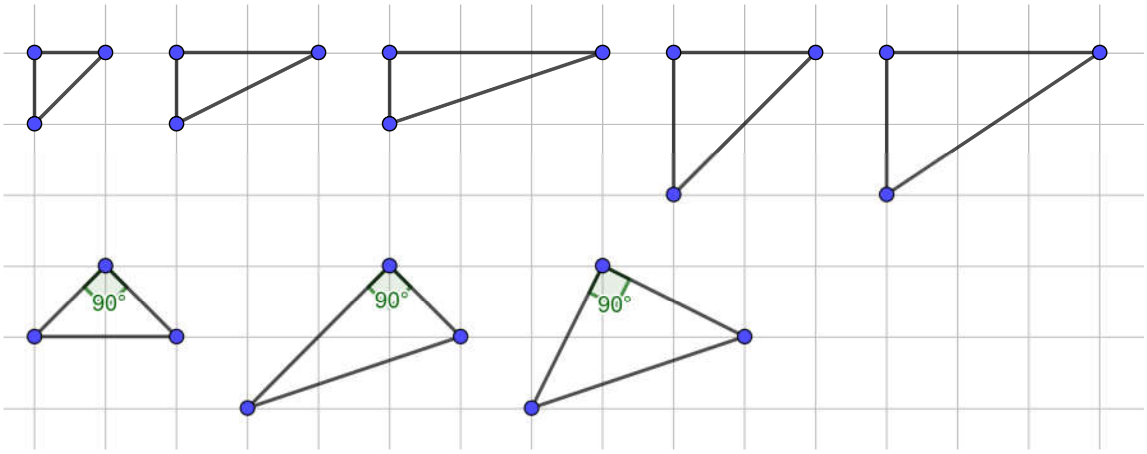


Douze points sont placés sur un quadrillage régulier comme sur la figure.

En reliant trois points bien choisis parmi ces douze points on peut former un triangle rectangle : il y a deux exemples sur la figure.

1) Combien de triangles rectangles différents (non superposables en les tournant ou en les retournant) peut-on former ?

On trouve huit triangles rectangles différents :



2) Combien y a-t-il de choix possibles de trois points pour former un triangle rectangle ?

Comptons les possibilités pour chacun des huit triangles.

Pour le 1er triangle il y a 6 petits carrés et 4 orientations possibles du triangle donc 24 possibilités.

Pour le 2^{e} triangle il y a 7 rectangles 1x2 et 4 orientations possibles du triangle donc 28 possibilités.

Pour le 3^{e} triangle il y a 2 rectangles 1x3 et 4 orientations possibles du triangle donc 8 possibilités.

Pour le 4^{e} triangle il y a 2 carrés 2x2 et 4 orientations possibles du triangle donc 8 possibilités.

Pour le 5^{e} triangle il y a 1 rectangle 2x3 et 4 orientations possibles du triangle donc 4 possibilités.

Pour le 6^{e} triangle il y a 7 rectangles 1x2 et 2 orientations possibles du triangle donc 14 possibilités.

Pour le 7^{e} triangle il y a 1 rectangle 2x3 et 4 orientations possibles du triangle donc 4 possibilités.

Pour le 8^{e} triangle il y a 1 rectangle 2x3 et 4 orientations possibles du triangle donc 4 possibilités.

Au total cela fait 24 + 28 + 8 + 8 + 4 + 14 + 4 + 4 = <u>94 choix de trois points</u> pour former un triangle rectangle.