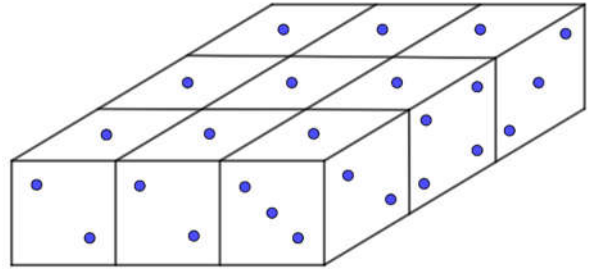


Tournoi 2025 corrigé quatrième

Des dés bien rangés

Un dé ordinaire a ses faces numérotées de 1 à 6 de façon que la somme des nombres de deux faces opposées soit toujours égale à 7.

On range 9 dés dans une boîte transparente que l'on ferme (comme sur la figure) puis on fait la somme des numéros visibles sur les 6 faces de la boîte.



1) Que vaut cette somme au maximum ? au minimum ?

Pour chacun des 9 dés la somme des numéros des faces supérieure et inférieure vaut 7, cela fait donc un total de $9 \times 7 = 63$ pour les faces supérieure et inférieure de la boîte, quelle que soit la manière dont on a rangé les dés. Sur les côtés de la boîte on aimerait placer 6 partout mais ce n'est pas possible car à chaque angle on ne peut pas avoir deux 6, le mieux qu'on puisse faire est de mettre un 5 et un 6 à chaque angle. On obtient comme somme totale : $63 + 8 \times 6 + 4 \times 5 = 131$.

Pour le minimum on place le 1 au milieu de chaque côté et le 1 et le 2 à chaque angle d'où une somme totale : $63 + 8 \times 1 + 4 \times 2 = 79$.

2) Mêmes questions si on range 16 dés dans une boîte transparente (de 4 dés sur 4 dés).

De la même façon le total pour les faces supérieure et inférieure de la boîte vaut $16 \times 7 = 112$.

Pour le maximum on place des 6 sur les côtés, sauf à chaque angle où l'on met un 5 et un 6, d'où une somme totale maximale égale à $112 + 12 \times 6 + 4 \times 5 = 204$.

Pour le minimum on place des 1 sur les côtés, sauf à chaque angle où l'on met un 1 et un 2, d'où une somme totale minimale égale à $112 + 12 \times 1 + 4 \times 2 = 132$.

Doublement carré

2025 est un carré tel que la somme de ses chiffres est également un carré. On dit que 2025 est doublement carré.

1) Déterminez tous les entiers inférieurs à 100 qui sont doublement carrés.

On obtient sans difficultés 1, 4, 9, 36, 81 (sans compter 0 et 100).

2) Déterminez le plus grand nombre doublement carré inférieur à 2025 et le plus petit nombre doublement carré supérieur à 2025.

$2025 = 45^2$. On essaie $44^2 = 1936$, $43^2 = 1849$ et $42^2 = 1764$ qui ne conviennent pas mais $41^2 = 1681$ est doublement carré.

De même $46^2 = 2116$ et $47^2 = 2209$ ne conviennent pas mais $48^2 = 2304$ est doublement carré.

3) Déterminez tous les nombres doublement carrés à 4 chiffres.

Il faut calculer les carrés des entiers de 32 à 99 ($31^2 = 961$ n'a que 3 chiffres et $100^2 = 10000$ en a 5).

On obtient 17 entiers doublement carrés à 4 chiffres :

$39^2 = 1521$, $41^2 = 1681$, $45^2 = 2025$, $48^2 = 2304$, $51^2 = 2601$, $58^2 = 3364$, $59^2 = 3481$, $60^2 = 3600$, $67^2 = 4489$, $68^2 = 4624$, $76^2 = 5776$, $77^2 = 5929$, $85^2 = 7225$, $86^2 = 7396$, $90^2 = 8100$, $94^2 = 8836$ et $95^2 = 9025$.

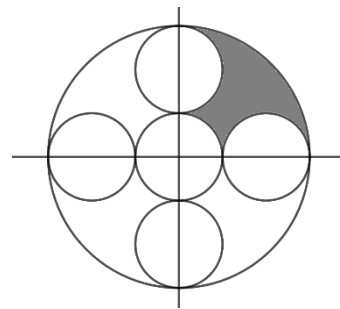
Petits disques dans un grand

1) On a placé 5 disques de même rayon dans un grand disque comme sur la première figure. Le grand disque a pour aire 2025 cm^2 .

Quelle est l'aire de la zone grisée ?

Notons r le rayon de chaque petit disque. Le rayon du grand disque est alors égal à $3r$. L'aire d'un petit disque est égale à πr^2 et celle du grand disque à $\pi(3r)^2 = 9\pi r^2 = 2025$.

Quatre fois l'aire de la zone grisée vaut $9\pi r^2 - 5\pi r^2 = 4\pi r^2$, l'aire de la zone grisée est donc égale à πr^2 , c'est-à-dire $1/9^e$ de l'aire du grand disque : $2025 / 9 = \underline{225 \text{ cm}^2}$.



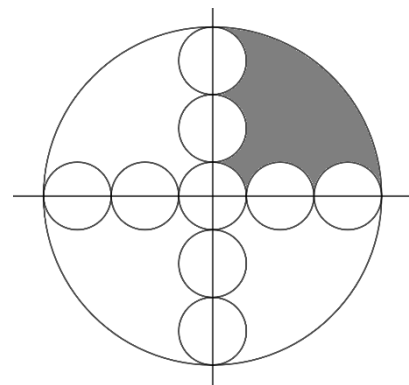
2) On a placé 9 disques de même rayon dans un grand disque comme sur la deuxième figure.

Le grand disque a pour aire 2025 cm^2 .

Quelle est l'aire de la zone grisée ?

Notons r le rayon de chaque petit disque. Le rayon du grand disque est alors égal à $5r$. L'aire d'un petit disque est égale à πr^2 et celle du grand disque à $\pi(5r)^2 = 25\pi r^2 = 2025$.

Quatre fois l'aire de la zone grisée vaut $25\pi r^2 - 9\pi r^2 = 16\pi r^2$, l'aire de la zone grisée est donc égale à $4\pi r^2$, c'est-à-dire $\frac{4}{25} \times 25\pi r^2 = \frac{4}{25} \times 2025 = \underline{324 \text{ cm}^2}$.



3) Généralisez avec n disques de même rayon sur chacun des axes (n désignant un entier impair).

Notons r le rayon de chaque petit disque. Le rayon du grand disque est alors égal à nr . L'aire d'un petit disque est égale à πr^2 et celle du grand disque à $\pi(nr)^2 = \pi n^2 r^2 = 2025$.

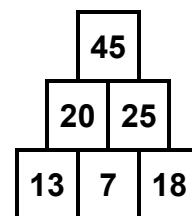
Il y a au total $n + (n-1) = 2n - 1$ petits disques.

Quatre fois l'aire de la zone grisée vaut $\pi n^2 r^2 - (2n-1)\pi r^2 = (n^2 - 2n + 1)\pi r^2$, l'aire de la zone grisée est donc égale à $\frac{(n^2 - 2n + 1)\pi r^2}{4} = \frac{(n^2 - 2n + 1)\pi n^2 r^2}{4n^2} = \frac{2025(n^2 - 2n + 1)}{4n^2} = \frac{(45(n-1))^2}{(2n)^2} \text{ cm}^2$.

Pyramide limousine

Une pyramide de nombres est un empilement de cases carrées contenant chacune un nombre entier strictement positif, de telle sorte que le nombre contenu dans une case soit la somme des deux nombres situés dans les cases juste en dessous.

La figure ci-contre est une pyramide de nombres de hauteur trois.



Par convention on impose que l'entier en bas à gauche soit inférieur à celui en bas à droite.

1) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois ne contenant que des nombres à un chiffre, ces chiffres étant deux à deux distincts.

Sur la deuxième rangée les nombres sont au moins égaux à $3 = 1 + 2$ et par la convention ils vont en croissant.

Le nombre au sommet peut être 9, la deuxième rangée est alors (3, 6) ou (4, 5).

Il y a deux possibilités pour la base dans le premier cas, (1, 2, 4) et (2, 1, 5), mais une seule dans le second cas, (1, 3, 2), puisque (3, 1, 4) n'est pas possible (il y aurait deux 4).

Le nombre au sommet peut aussi être 8, la deuxième rangée est alors (3, 5) et la base (2, 1, 4) car (1, 2, 3) donnerait deux 3.

Le nombre au sommet ne peut pas être 7 car la deuxième rangée serait alors (3, 4) et aucune base ne convient.

Il y a donc 4 pyramides de bases (1, 2, 4), (2, 1, 5), (1, 3, 2) et (2, 1, 4).

2) Combien y a-t-il de pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87 (numéros des départements de l'Académie de Limoges) au sommet et aux extrémités de la base de la pyramide ?

Le nombre au sommet est plus grand que les nombres de la base donc c'est 87.

Notons x le nombre au milieu de la base qui s'écrit donc (19, x, 23). Sur la deuxième ligne il y a alors $19 + x$ et $23 + x$ et le nombre au sommet est donc égal à $2x + 42 = 87$. C'est impossible puisqu'on en déduirait $x = 22,5$ qui n'est pas un entier : il n'existe aucune pyramide qui respecte les conditions demandées.

3) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87.

Une recherche systématique montre qu'il existe au total 15 pyramides contenant les nombres 19, 23 et 87 :

152	216	148	87	87	87	87	129
42 110	106 110	42 106	42 45	42 45	23 64	23 64	42 87
19 23 87	19 87 23	23 19 87	19 23 22	23 19 26	19 4 60	4 19 45	19 23 64
129	178	170	114	110	129	110	
42 87	87 91	83 87	23 91	23 87	23 106	23 87	
23 19 68	19 68 23	19 64 23	19 4 87	19 4 83	4 19 87	4 19 68	