

Tournoi 2025 corrigé lycée

Des sommes égales à 99 et à 999

On place des chiffres compris entre 1 et 9 dans une grille 2×3 de façon que la somme des deux entiers lus horizontalement soit 999 et que la somme des trois entiers lus verticalement (de haut en bas) soit 99.

1) Vérifiez que la grille ci-contre convient.

On a bien $242 + 757 = 999$ et $27 + 45 + 27 = 99$

2	4	2
7	5	7

2) Quel est le plus petit nombre que l'on peut lire sur la première ligne d'une grille vérifiant ces conditions ?

On essaie un nombre débutant par 11 : la seconde ligne débute alors par 88 et la somme des deux premières colonnes vaut $18 + 18 = 36$ d'où la troisième colonne $99 - 36 = 63$.

Le plus petit nombre en première ligne est donc 116, le nombre en seconde ligne étant 883.

3) Donnez une grille formée de 6 chiffres distincts vérifiant ces conditions.

On essaie un nombre débutant par 12 : la seconde ligne débute alors par 87 et la somme des deux premières colonnes vaut $18 + 27 = 45$ d'où la troisième colonne $99 - 45 = 54$.

La grille formée de 125 en première ligne et de 874 en seconde ligne a bien 6 chiffres distincts.

Combien en existe-t-il ?

Pour trouver toutes les grilles formées de 6 chiffres distincts vérifiant ces conditions on notera (a,b,c) la première ligne et (a',b',c') la seconde.

En ajoutant les lignes on obtient la condition $(100a + 10b + c) + (100a' + 10b' + c') = 999$ qui est équivalente à : $a + a' = b + b' = c + c' = 9$ (*).

En ajoutant les colonnes on obtient la condition $(10a + a') + (10b + b') + (10c + c') = 99$. En remplaçant a' , b' , c' en fonction de a , b , c on obtient $9a + 9 + 9b + 9 + 9c + 9 = 99$ qui est équivalente à $a + b + c = 8$ (**).

On recherche d'abord les solutions avec $a < b < c$: il y en a seulement deux, (1, 2, 5) et (1, 3, 4).

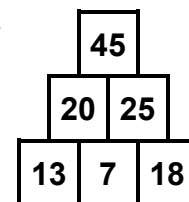
On peut permuter les triplets (a,b,c) , chacun donnant six solutions d'où 12 grilles avec 6 chiffres distincts.

4) Combien existe-t-il de grilles vérifiant ces conditions (on ne suppose plus les chiffres distincts) ?

Comme à la question 3 on doit vérifier les conditions (*) et (**). On recherche d'abord les solutions avec $a < b < c$. En plus des triplets (a,b,c) obtenus à la question 3 il y a les triplets vérifiant $a + b + c = 8$ avec les trois nombres qui ne sont pas distincts : (1,1,6), (2,2,4) et (2,3,3). Chacun donne trois solutions par permutation d'où 9 grilles avec des nombres qui ne sont pas distincts. Le nombre total de grilles est donc $12 + 9 = 21$.

Pyramide limousine

Une pyramide de nombres est un empilement de cases carrées contenant chacune un nombre entier strictement positif, de telle sorte que le nombre contenu dans une case soit la somme des nombres situés dans les deux cases juste en dessous.



La figure ci-contre est une pyramide de nombres de hauteur trois.

Par convention on impose que l'entier en bas à gauche soit inférieur à celui en bas à droite.

1) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois ne contenant que des nombres à un chiffre, ces chiffres étant deux à deux distincts.

Sur la deuxième rangée les nombres sont au moins égaux à $3 = 1 + 2$ et par la convention ils vont en croissant.

Le nombre au sommet peut être 9, la deuxième rangée est alors (3, 6) ou (4, 5).

Il y a deux possibilités pour la base dans le premier cas, (1, 2, 4) et (2, 1, 5), mais une seule dans le second cas, (1, 3, 2), puisque (3, 1, 4) n'est pas possible (il y aurait deux 4).

Le nombre au sommet peut aussi être 8, la deuxième rangée est alors (3, 5) et la base (2, 1, 4) car (1, 2, 3) donnerait deux 3.

Le nombre au sommet ne peut pas être 7 car la deuxième rangée serait alors (3, 4) et aucune base ne convient.

Il y a donc 4 pyramides de bases (1, 2, 4), (2, 1, 5), (1, 3, 2) et (2, 1, 4).

2) Combien y a-t-il de pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87 (numéros des départements de l'Académie de Limoges) au sommet et aux extrémités de la base de la pyramide ?

Le nombre au sommet est plus grand que les nombres de la base donc c'est 87.

Notons x le nombre au milieu de la base qui est donc (19, x , 23). Sur la deuxième ligne il y a alors $19 + x$ et $23 + x$ et le nombre au sommet est donc égal à $2x + 42 = 87$. C'est impossible puisque $2x + 42$ est un entier pair alors que 87 est impair : il n'existe aucune pyramide qui respecte les conditions demandées.

3) Déterminez toutes les pyramides de hauteur trois contenant les nombres 19, 23 et 87.

Une recherche systématique montre qu'il existe au total 15 pyramides contenant les nombres 19, 23 et 87 :

152	216	148	87	87	87	87	129
42 110	106 110	42 106	42 45	42 45	23 64	23 64	42 87
19 23 87	19 87 23	23 19 87	19 23 22	23 19 26	19 4 60	4 19 45	19 23 64
129	178	170	114	110	129	110	
42 87	87 91	83 87	23 91	23 87	23 106	23 87	
23 19 68	19 68 23	19 64 23	19 4 87	19 4 83	4 19 87	4 19 68	

4) Donnez une pyramide de hauteur sept contenant les nombres 16, 17, 19, 23, 24, 33, 40, 47, 64, 79, 86 et 87 (numéros des départements de la Région Nouvelle-Aquitaine).

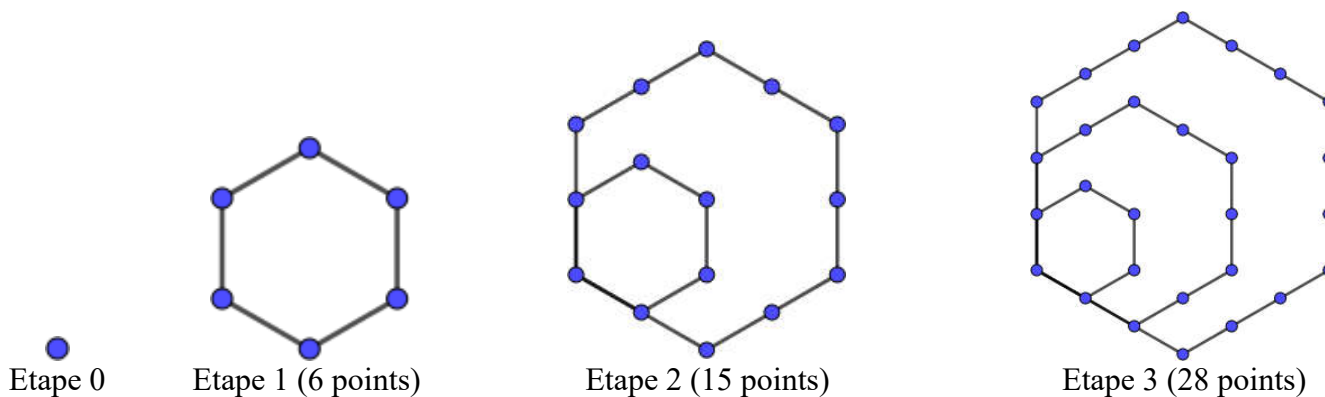
1571					
710		861			
333		377	484		
160	173	204	280		
73	87	86	118	162	
33	40	47	39	79	83
16	17	23	24	15	64 19

Des polygones emboîtés

Pour un entier $p \geq 3$, on considère la construction suivante :

- à l'étape 0, on place un point dans le plan ;
- à l'étape 1, on place, à partir du point de l'étape 0, les p sommets d'un polygone régulier à p côtés de longueur 1 unité ;
- à l'étape 2, on place, à partir du point de l'étape 0 et des deux côtés adjacents de l'étape 1, les p sommets d'un polygone régulier à p côtés de longueur 2 unités et on place sur les côtés les points toutes les unités ;
- ...
- à l'étape n , on place, à partir du point de l'étape 0 et des deux côtés adjacents de l'étape précédente, les p sommets d'un polygone régulier à p côtés de longueur n unités et on place sur les côtés les points toutes les unités.

Exemple pour $p = 6$:



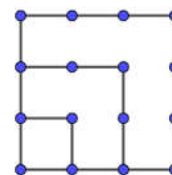
On admet que, pour tout entier naturel k , la somme des entiers naturels inférieurs ou égaux à k est $\frac{k(k+1)}{2}$

1) Dans le cas où $p = 4$, déterminez le nombre de points à l'étape n (entier strictement positif quelconque).

A l'étape 3 on observe qu'il y a $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ points remplissant un carré de côté 4 points (voir figure ci-contre).

On en voit sans difficultés qu'à l'étape n le nombre de points est égal à $(n+1)^2$.

C'est aussi la somme des $n+1$ premiers entiers impairs : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$.

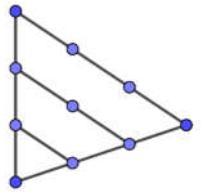


- 2) Dans le cas où $p = 3$, déterminez le nombre de points à l'étape n (entier strictement positif quelconque)

A l'étape 3 on observe qu'il y a $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ points (voir figure ci-contre).

A chaque étape on ajoute l'entier suivant.

A l'étape n le nombre de points est donc égal à la somme des entiers de 1 à $n+1$ qui vaut $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.



- 3) On se place avec p quelconque. Déterminez le nombre de points à l'étape 1, à l'étape 2 et à l'étape 3.
A l'étape 1 il y a p points (le nombre de sommets du polygone).

A l'étape 2 on ajoute les $2p$ points du polygone de côté de longueur 2 unités mais il faut retrancher 3 points qui appartiennent déjà au polygone de côté de longueur 1 unité, cela fait $p + 2p - 3 = 3p - 3$ points.

A l'étape 3 on ajoute les $3p$ points du polygone de côté de longueur 3 unités mais il faut retrancher 5 points qui appartiennent déjà au polygone de côté de longueur 2 unités, ce qui fait au total : $p + (2p - 3) + (3p - 5) = 6p - 8$ points.

- 4) On se place avec p quelconque. Déterminez le nombre de points à l'étape n , avec n entier quelconque.
On généralise à l'étape n : $(1 + 2 + 3 + \dots + n)p - (3 + 5 + \dots + (2n-1)) = \frac{n(n+1)}{2}p - (n^2 - 1)$ points (en utilisant le fait que la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2).

On peut factoriser : $\frac{(n+1)(np-2n+2)}{2}$.

- 5) Pour quelles valeurs de n et p a-t-on exactement 2025 points ?

Il s'agit de résoudre l'équation $(n+1)(np-2n+2) = 4050 = 2 \times 3^4 \times 5^2$.

On essaie toutes les valeurs de n telles que $n+1$ est un diviseur de 4050. Il y en a cinq pour lesquelles on en déduit une valeur entière pour p :

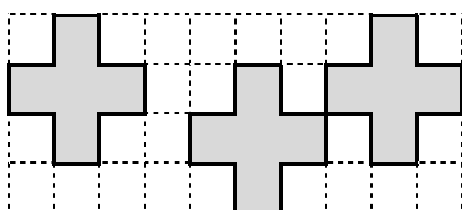
$n = 1$ et $p = 2025$, $n = 2$ et $p = 676$, $n = 4$ et $p = 204$, $n = 8$ et $p = 58$, $n = 44$ et $p = 4$.

Cette dernière solution était prévisible puisqu'on a vu à la question 1 que pour $p = 4$ le nombre de points est $(n+1)^2$ et que $2025 = 45^2$.

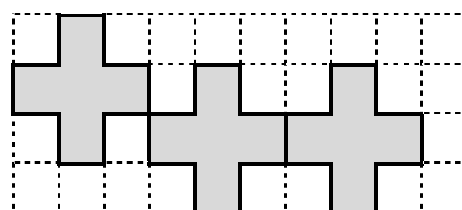
Un maximum de croix

On dispose d'un rectangle quadrillé à n lignes et p colonnes. On souhaite disposer dessus des croix constituées de 5 petits carrés, de sorte que deux croix ne puissent se toucher que par des sommets mais pas par des côtés.

Par exemple, pour un rectangle quadrillé à 4 lignes et 10 colonnes :



Pavage correct

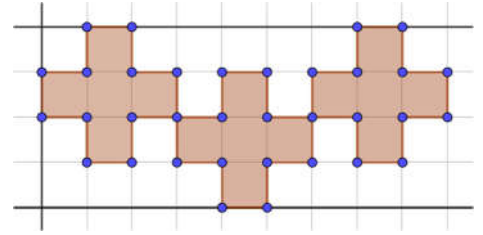


Pavage incorrect

- 1) On considère un rectangle quadrillé à 4 lignes et p colonnes. En fonction de la valeur de p , combien peut-on disposer de croix au maximum sur ce quadrillage ?

Dans le cas de 4 lignes on n'a pas le choix pour disposer le maximum de croix, il faut alterner une croix en bas et une croix en haut (ou l'inverse), chaque croix utilisant 3 colonnes.

On peut donc placer au maximum n croix quand $p = 3n$, $p = 3n+1$ et $p = 3n+2$.

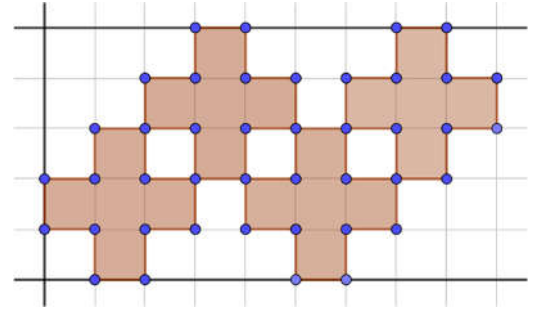


- 2) On considère un rectangle quadrillé à 5 lignes et p colonnes. En fonction de la valeur de p , combien peut-on disposer de croix au maximum sur ce quadrillage ?

Dans le cas de 5 lignes on peut rapprocher davantage les croix comme sur la figure ci-contre.

Il faut trois colonnes pour pouvoir placer la première croix, puis deux de plus à chaque fois qu'on veut placer une nouvelle croix.

On peut donc placer au maximum n croix quand $p = 2n+1$ et $p = 2n+2$.



- 3) On considère un rectangle quadrillé à 7 lignes et p colonnes. En fonction de la valeur de p , combien peut-on disposer de croix au maximum sur ce quadrillage ?

Dans le cas de 7 lignes on peut placer deux croix l'une au-dessus de l'autre puis insérer une croix au centre, puis à nouveau deux croix l'une au-dessus de l'autre, etc... comme sur la figure ci-contre.

On peut placer 2 croix pour $p = 3$ et $p = 4$, 3 croix pour $p = 5$ et $p = 6$, 5 croix pour $p = 7$ et $p = 8$, etc...

Plus généralement on peut placer au maximum $3k - 1$ croix pour $p = 4k - 1$ et pour $p = 4k$, au maximum $3k$ croix pour $p = 4k + 1$ et pour $p = 4k + 2$ (k entier au moins égal à 1).

